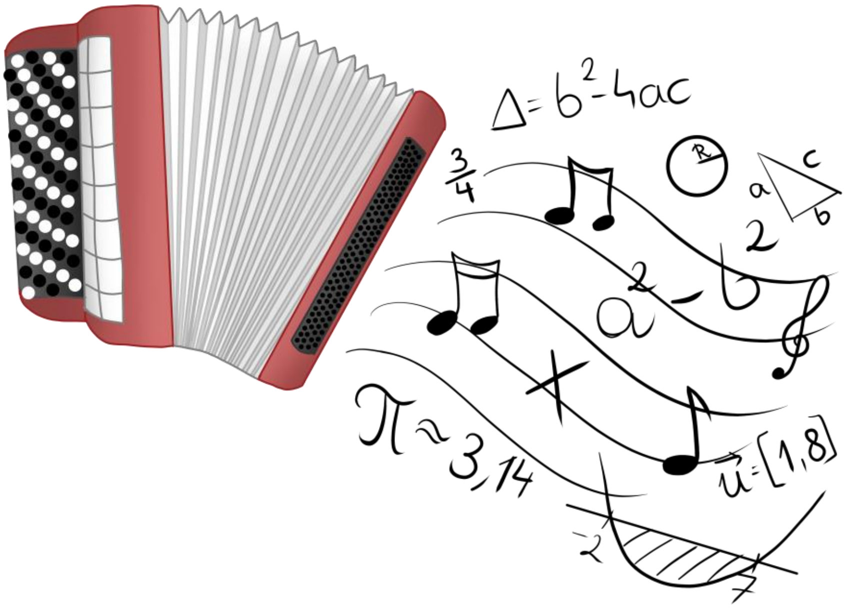
Szkoła Podstawowa
w Jawiszowicach
im. K. I. Gałczyńskiego

WYGRAĆ MATEMATYKĘ



Autor: Paweł Nawrocki

Klasa 6

Opiekun: mgr Izabella Pest-Janusz

Małopolski Konkurs Prac Matematycznych – Kraków 2020

Spis treści

Wstęp

Podczas ubiegłorocznej Sesji Matematycznej na pytanie Pani dr Anny Widur, jakie dostrzegam powiązania (jako uczeń szkoły muzycznej i pasjonat matematyki) między matematyką a muzyką, stwierdziłem, że jest ich tak dużo, że nie da się wymienić w jednym zdaniu. To proste pytanie stało się dla mnie niejako wyzwaniem do zmierzenia się z tym tematem w bieżącym roku. Odłożyłem więc na później inne fascynujące problemy matematyczne (np. hiperprzestrzeń, liczby zespolone), które chciałbym zgłębić w najbliższym czasie. Zabrałem się do pracy, zbierając i porządkując wspólne elementy tych dwóch bliskich mi nauk, a także odkrywając nowe, o których do tej pory jeszcze nie wiedziałem.

W tych poszukiwaniach niezwykle inspirujące stały się dla mnie artykuły, wykłady i filmy znalezione na Portalu Matematycznym The Mathteacher, Poznańskim Portalu Matematycznym oraz Wrocławskim Portalu Matematycznym. Poszukując materiałów natrafiłem także na pracę „Muzyczna matematyka" Klary Marii Zglińskiej, laureatki konkursu prac matematycznych z 2011 roku, która w ciekawy sposób opisywała związki matematyki i muzyki.

W swojej pracy prezentuję wspólne elementy moich dwóch pasji, jakimi są matematyka i muzyka. Wiele przykładów opisuję na podstawie własnych doświadczeń z lat nauki w Państwowej Szkole Muzycznej I stopnia im. Karola Szymanowskiego w Oświęcimiu. To właśnie dzięki wspaniałym nauczycielom pogłębiłem wiedzę i poznałem tajniki muzyki, do których mogłem się odwołać podczas pisania niniejszej pracy. Na końcu zamieściłem kilka ciekawostek na temat matematycznych inspiracji.

Pewien wielki matematyk powiedział kiedyś, że muzyka jest „przyjemnością, jakiej dusza ludzka doświadcza przez liczenie, nie zdając sobie sprawy, że ma do czynienia z liczeniem". Dla mnie matematyka jest muzyką duszy, a muzyka arcydziełem matematyki.

Życzę przyjemnej lektury!

Paweł Nawrocki

1. Co wspólnego ma Pitagoras z muzyką?

Nierozerwalne związki muzyki z matematyką zauważono już w starożytności. Pitagorejczycy, których przewodnie hasło brzmiało „Wszystko jest liczbą", odkryli wielką czwórkę liczb: 1,2,3,4, zaś sam Pitagoras znany był w starożytnej Grecji z **odkrycia skali muzycznej**. Do jego spostrzeżeń i obliczeń można się wielokrotnie w muzyce odwoływać.

„Jak głosi legenda, pewnego dnia Pitagoras bawił się monochordem, tj. instrumentem złożonym z pudełka i przeciągniętej po nim struny. Przesuwając ruchomy mostek w górę i w dół monochordu, zmieniał wysokość dźwięku. Odkrył wówczas, że zachowanie struny jest osobliwe, ale przewidywalne. Gdy trącił strunę bez mostka, otrzymał czysty dźwięk, zaś gdy umieścił mostek dokładnie pośrodku instrumentu, stwierdził, że każda z części wytwarza taki sam dźwięk, ale dwa razy wyższy niż podstawowy. Niewielkie przesunięcie mostka, które na przykład dzieli strunę w stosunku 3/5 do 2/5 struny i trącenie obu części wytwarza dwa tony, które są oddalone o interwał zwany w muzyce kwintą (stosunek 3:2) – interwał uważany za najbardziej poruszający i twórczy. Podział struny w innych proporcjach pozwala uzyskać rozmaite kombinacje tonów, które są albo przyjemne, albo nieprzyjemne dla ucha. Co ciekawe, kiedy Pitagoras umieścił mostek w punkcie, który nie dzielił struny według prostego stosunku, to tony nie pasowały do siebie i zwykle powstawał dysonans. Dla Pitagorasa gra na instrumencie była czynnością matematyczną. Harmonia monochordu była również harmonią matematyki oraz harmonią Wszechświata."[1]

2. Co wspólnego ma Albert Einstein z muzyką?

Albert Einstein, geniusz w dziedzinie fizyki, z pasją grał na skrzypcach i był zafascynowany muzyką Mozarta. Muzyka dla Einsteina nie była zwykłą rozrywką, lecz pomagała mu myśleć i rozwiązywać skomplikowane zagadnienia. Hans Albert, syn uczonego, wspominał o ojcu, że „zawsze kiedy czuł, że zabrnął w ślepą uliczkę albo napotkał na swej drodze jakieś trudne wyzwanie szukał wyjścia w muzyce i ostatecznie pokonywał trudności". Natomiast jeden z przyjaciół Einsteina powiedział: „Często do późna w nocy grał na skrzypcach w kuchni, improwizując jakieś melodie i jednocześnie rozważając skomplikowane zagadnienia nagle przerywał grę i wykrzykiwał: Mam to!"[2]

[1] https://cnm.pg.edu.pl/documents/10871/31009714/2011_07_KN.pdf

[2] https://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=773

3. Dźwięk jako wartość matematyczna i fizyczna

Ważna rola matematyki w muzyce ujawnia się, gdy chcemy zrozumieć, co to jest dźwięk i jakie są jego własności.

Dźwięk to fala rozchodząca się w ośrodku sprężystym (ciele stałym, cieczy, gazie) z daną częstotliwością.

Do podstawowych cech dźwięku zalicza się:

- wysokość dźwięku,
- głośność dźwięku,
- czas trwania dźwięku,
- barwa dźwięku.

Cechy te związane są ściśle z odpowiednimi parametrami fali akustycznej.

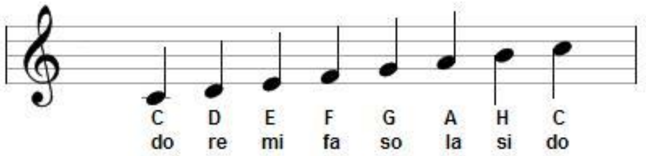
Częstotliwość drgań (oznaczana symbolem f) jest to liczba drgań przypadających na 1 sekundę. Jednostką częstotliwości dźwięku jest herc (Hz), a nazwa tej jednostki pochodzi od nazwiska wynalazcy fal elektromagnetycznych Heinricha Herza. Częstotliwość dźwięków słyszalnych zawiera się w zakresie od 16 do 20 000 Hz.

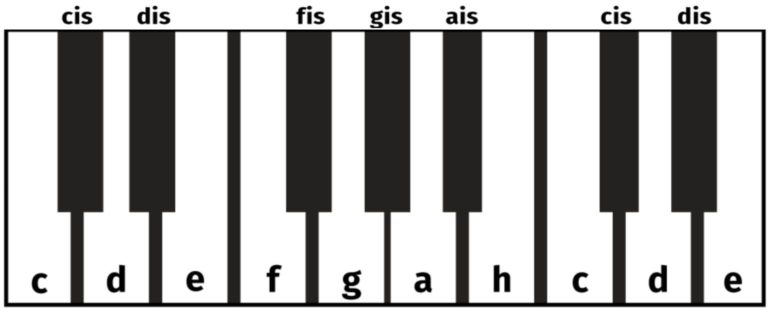
Wysokość dźwięku jest zależna od częstotliwości, przy czym zachodzi zależność, że im większa częstotliwość dźwięku, tym wyższa wysokość, np. dźwięk **a** ma częstotliwość: 440 Hz, czyli w ciągu sekundy powietrze (lub inny ośrodek) drga 440 razy. Od tego dźwięku stroi się wszystkie instrumenty.

Głośność dźwięku zależy od natężenia dźwięku – jest to miara energii fali akustyczne równa średniej wartości strumienia energii akustycznej przepływającego w jednostce czasu (1s) przez jednostkowe pole powierzchni ($1m^2$) zorientowanej prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali.

Barwa dźwięku zależy od tego kto lub co jest źródłem dźwięku, np. instrumenty muzyczne, głosy ludzi, ptaków i zwierząt czy hałasy maszyn.

W dźwiękach tworzących muzykę można znaleźć porządek matematyczny. Pitagorejczycy podzielili całą skalę muzyczną na równomierne oktawy. Oktawa pitagorejska dzieliła się na 7 tonów i 12 półtonów.

Odległości między dźwiękami mierzy się liczbą półtonów pomiędzy nimi. W gamie wyróżniamy 7 podstawowych tonów uporządkowanych według określonego wzoru (C-D-E-F-G-A-H), co daje 6 odstępów między nimi. Stąd wynika, że gama jest podzielona na 12 równych półtonów.

dźwięki podstawowe



tony i półtony

Źródło: https://mlodytechnik.pl/i/images/3/4/1/dz0yNjUyJmg9MTIyNQ==_src_16341-01.png

To dzięki Pitagorasowi zawdzięczamy w muzyce naczelną zasadę, że nuty odległe od siebie o pełną oktawę powinny mieć częstotliwości pozostające w stosunku 2:1. Za pomocą wspomnianego wcześniej monochordu Pitagoras analizował, jak zmieniają się odległości między dźwiękami i doszedł do wniosku, że najmilsze dla ucha harmonie wyrażone są poprzez najprostsze proporcje. Zaproponował, aby stosunek częstotliwości sąsiednich nut wynosił 9/8 dla pełnych tonów (np. od C do D), a 256/243 dla półtonów (np. od E do F).

Stosunek częstotliwości dźwięków różniących się o oktawę (np. dolnego i górnego C) wynosi 2, zatem częstotliwość pomiędzy każdym kolejnym półtonem zwiększa się $\sqrt[12]{2}$ razy.

c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h	c
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2}^5$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2}^7$	$\sqrt[3]{2}^2$	$\sqrt[4]{2}^3$	$\sqrt[6]{2}^5$	$\sqrt[12]{2}^{11}$	2

nazwy dźwięków gamy

stosunek częstotliwości danego dźwięku do częstotliwości dolnego C

Cała **skala pitagorejska** przedstawia się następująco:

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\frac{9}{8}} \mathbf{D} \xrightarrow{\frac{9}{8}} \mathbf{E} \xrightarrow{\frac{256}{243}} \mathbf{F} \xrightarrow{\frac{9}{8}} \mathbf{G} \xrightarrow{\frac{9}{8}} \mathbf{A} \xrightarrow{\frac{9}{8}} \mathbf{B} \xrightarrow{\frac{256}{243}} \mathbf{C}$$

Proporcje między dźwiękami 1:2, 2:3 i 3:4 dają ładne współbrzmienie powstających dźwięków. Pitagorejczycy nazwali odpowiadające tym proporcjom interwały: **oktawą, kwintą i kwartą**. Ten podział obowiązuje w muzyce do dnia dzisiejszego.

Wykorzystując skalę pitagorejską dokonałem obliczeń, którymi sprawdziłem, czy dźwięki będą ze sobą współbrzmiały lub czy powstanie dysharmonia.

Przykład 1

Pytanie:	**Czy dźwięki C i F będą ze sobą współbrzmiały?**
Obliczenie:	9/8 · 9/8 · 256/243 = 20736/15552 = 4/3 (brzmienie harmoniczne – kwarta)
Odpowiedź:	Dźwięki C i F będą ze sobą współbrzmiały, a interwał ten nazywamy kwartą.

Przykład 2

Pytanie:	**Czy dźwięki C i G będą ze sobą współbrzmiały?**
Obliczenie:	9/8 · 9/8 · 256/243 · 9/8 = 186624/124416 = 3/2 (brzmienie harmoniczne – kwinta)
Odpowiedź:	Dźwięki C i G będą ze sobą współbrzmiały, a interwał ten nazywamy kwintą.

Przykład 3

Pytanie:	**Czy dźwięki C i fis będą ze sobą współbrzmiały?**
Obliczenie:	256/243 · 256/243 · 256/243 · 256/243 · 256/243 · 256/243 = = 281 474 976 710 656 / 205 891 132 094 649 = 1,37 = 137/100 (dysharmonia)
Odpowiedź:	Dźwięki C i fis nie będą ze sobą współbrzmiały, powstanie dysharmonia.

Poprawność obliczeń i współbrzmienie sprawdziłem grając powyższe dźwięki na akordeonie. W pierwszych dwóch przypadkach dźwięki ze sobą współbrzmią, a w ostatnim nie.

Podsumowując: harmonia wyraża się przez stosunek dwóch liczb naturalnych i tym jest pełniejsza, im liczby te są mniejsze.

W kolejnych stuleciach opracowano także inny sposób strojenia instrumentów, tzw. **strój naturalny**, gdzie stosunek częstotliwości wygląda następująco:

$$C \xrightarrow{\frac{9}{8}} D \xrightarrow{\frac{10}{9}} E \xrightarrow{\frac{16}{15}} F \xrightarrow{\frac{9}{8}} G \xrightarrow{\frac{10}{9}} A \xrightarrow{\frac{9}{8}} B \xrightarrow{\frac{16}{15}} C$$

Niestety, oba systemy (strój pitagorejski i naturalny) nie sprawdzają się w przypadku, gdy trzeba zagrać utwór muzyczny w innej tonacji. Przestrojenie instrumentów wymaga wiele trudu, a czasem jest wręcz niemożliwe (np. w przypadku instrumentów dętych drewnianych). Ten problem wymagał znalezienia innego rozwiązania, który doprowadził do opracowania tzw. **systemu równomiernie temperowanego**, z którego korzystają współcześnie orkiestry.

Wykorzystano tutaj zasadę, że przejście całej oktawy podwaja częstotliwość.

Stosunek częstotliwości między kolejnymi nutami wynosi *x*,

z tego wynika: $\mathbf{x^{12} = 2}$, co daje wynik: $\mathbf{x = \sqrt[12]{2} = 1{,}059}$

Jeżeli instrumenty są nastrojone tak, że stosunek między częstotliwościami dla kolejnych nut wynosi $\sqrt[12]{2}$, to nie trzeba przestrajać instrumentów przy zmianie tonacji.[3]

Skala temperowana została rozsławiona przez Jana Sebastiana Bacha na początku XVIII wieku. Kompozytor był tak zachwycony tym systemem, że od razu napisał słynne dzieło „Das Wohltemperierte Klavier” /Dobrze nastrojony klawesyn/, które składa się z 24 preludiów i 24 fug (zawartych w dwóch tomach). W swoim utworze wykorzystał wszystkie tonacje, a każda para kompozycji jest w innej tonacji, począwszy od C-dur. Obydwa tomy mają ten sam układ: na każdym dźwięku zbudowane są dwie kompozycje w tonacjach jednoimiennych, np. C-dur i c-moll.[4]

[3] Scheinerman Edward: Przewodnik miłośnika matematyki. Arcydzieło dla każdego. Prószyński i S-ka, Warszawa 2019

[4] https://pl.wikipedia.org/wiki/Das_Wohltemperierte_Klavier

Analizując tabelę dźwięków gamy i stosunków częstotliwości należy wyjaśnić jeszcze jedno:
co oznacza umieszczony na środku i zaznaczony na czerwono dźwięk fis?

c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h	c
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2}^5$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2}^7$	$\sqrt[3]{2}^2$	$\sqrt[4]{2}^3$	$\sqrt[6]{2}^5$	$\sqrt[12]{2}^{11}$	2

Jest to dźwięk zwany **trytonem** (łac. *tritonus),* który oznacza 3 tony, czyli 6 półtonów. Dzieli on oktawę na połowy, przy czym odległość mierzona zarówno w górę jak i w dół gamy jest równa. I co ciekawe, jest to „najbrzydszy" dźwięk w całej gamie. Nie współbrzmi on z dźwiękiem C, co wcześniej sprawdziłem (matematycznie) w obliczeniach i praktycznie (muzycznie) na akordeonie.

Tryton jest interwałem brzmiącym niezgodnie, „brzmi fatalnie i rani uszy", dlatego w średniowiecznej muzyce kościelnej nazywano go *diabolus in musica* i używanie go było zakazane. Obecnie tryton jest często stosowany dla podkreślenia grozy i napięcia w muzyce filmowej czy heavymetalowej.[5]

[5] http://www.matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/pierwiastek-z-dwoch-w-muzyce

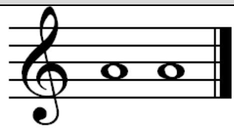
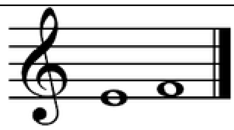
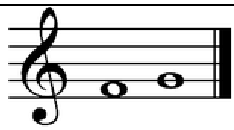
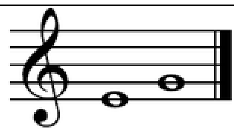
4. Interwały

Kolejnym elementem wspólnym matematyki i muzyki są odległości. W codziennym życiu mierzymy różne odległości za pomocą jednostki zwanej metrem, a w muzyce – odległość między dwoma dźwiękami. Ta **muzyczna odległość nazywana jest interwałem** i oznacza się ją cyframi. Rozmiar interwału i jego nazwa wskazuje na dokładną liczbę jego półtonów.

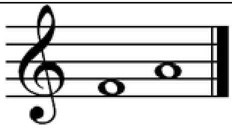
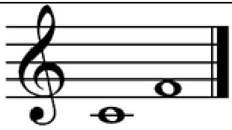
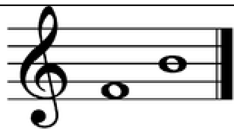
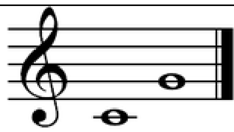
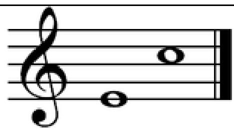
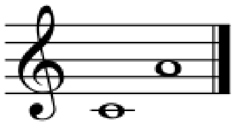
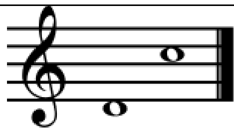
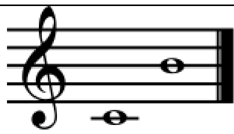
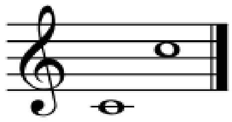
Nazwy interwałów pochodzą od liczebników łacińskich. Podstawowe interwały nazywane są sekundami (2), tercjami (3), kwartami (4), kwintami (5), sekstami (6), septymami (7). Odległość między dźwiękiem o określonej nazwie a kolejnym dźwiękiem o tej samej nazwie nazywa się oktawą (8). Istnieją także interwały o rozmiarze większym od oktawy, np. nona (9), tercdecyma (13) czy kwintdecyma (15), która jest największym stosowanym interwałem w muzyce.

Interwały podzielić można na trzy podstawowe rodzaje: czyste, małe i wielkie. Interwały czyste to kwarty, kwinty i oktawy. Natomiast sekundy, tercje, seksty i septymy mogą być zarówno małe jak i wielkie.

W poniższej tabeli zestawiłem podstawowe interwały. Przykłady graficznego zapisu interwałów zaczerpnąłem z Internetu.

interwał	ilość półtonów	oznaczenie w muzyce	wartość przybliżona	przykład[6]
pryma czysta	0	1	1:1	
sekunda mała	1	2>	16:15	
sekunda wielka	2	2	9:8	
tercja mała	3	3>	6:5	

[6] Obrazki interwałów: https://pl.wikipedia.org/wiki/Zestawienie_podstawowych_interwa%C5%82%C3%B3w

tercja wielka	4	3	5:4	
kwarta czysta	5	4	4:3	
kwarta zwiększona (tryton)	6	4<	45:32	
kwinta czysta	7	5	3:2	
seksta mała	8	6>	8:5	
seksta wielka	9	6	5:3	
septyma mała	10	7	9:5	
septyma wielka	11	7<	17:9	
oktawa	12	8	2:1	

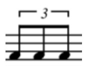
Przedrostki charakterystyczne dla nazw interwałów odnajdujemy także w matematyce: w nazwach dużych liczb, jednostkach odległości lub wagi czy figurach płaskich. Używamy ich w codziennym życiu, nie uświadamiając sobie czasem, że są powiązane z muzyką.

Poniżej przedstawiam kilka przykładów, które znalazłem.

Przykład 1

Muzyka: **tercja** - interwał o wartości 3

trio - zespół składający się z 3 wokalistów lub instrumentalistów

triola - nieregularna grupa rytmiczna zbudowana z 3 nut, np. triola ósemkowa to 3 ósemki odpowiadające jednej ćwierćnucie

trójdźwięk - najprostszy akord o budowie tercjowej, składający się z trzech dźwięków nazywanych: prymą, tercją i kwintą

triada harmoniczna - 3 podstawowe trójdźwięki zbudowane na pierwszym, czwartym i piątym stopniu gamy (tonika, subdominanta i dominanta)

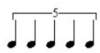
Matematyka: **trójkąt** - figura płaska z 3 bokami i 3 kątami
trylion - liczba równa $10^{3\cdot 6}$
trysekcja kąta lub boku - podział kąta lub boku na 3 równe części
trygonometria - dział matematyki zajmujący się zależnościami między długościami boków a miarami kątów wewnętrznych w trójkątach
przestrzeń trójwymiarowa - potoczna nazwa przestrzeni euklidesowej o trzech wymiarach (wysokość, długość, szerokość) lub równoważnej jej przestrzeni kartezjańskiej

Przykład 2

Muzyka: **kwarta** - interwał o wartości 4
kwartet - zespół składający się z 4 wokalistów lub instrumentalistów
kwadryl - XVIII-wieczny taniec salonowy w metrum przemiennym 6/8 i 2/4, tańczony przez 4 pary ustawione w kwadrat

Matematyka: **kwadrylion** - liczba równa $10^{4\cdot 6}$
kwadrat - figura płaska o 4 równych bokach i 4 kątach prostych
kwartyle - dzielą uporządkowane wartości na „ćwiartki”
kwartał - ¼ roku
kwadratura koła - problem polegający na skonstruowaniu kwadratu, którego pole jest równe polu danego koła przy użyciu wyłącznie cyrkla i linijki bez podziałki
kwadra pierwsza - faza Księżyca, w której Ziemia, Księżyc i Słońce tworzą ze sobą kąt prosty
kwaterniony - struktura algebraiczna (liczby) będąca rozszerzeniem ciała liczb zespolonych, należąca do grupy liczb hiperzespolonych

Przykład 3

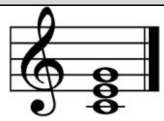
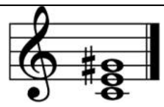
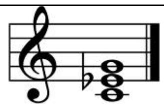
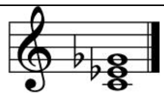
Muzyka: **kwinta** - interwał o wartości 5
kwintdecyma - interwał o wartości 15
kwintola - nieregularna grupa rytmiczna zbudowana z 5 nut 

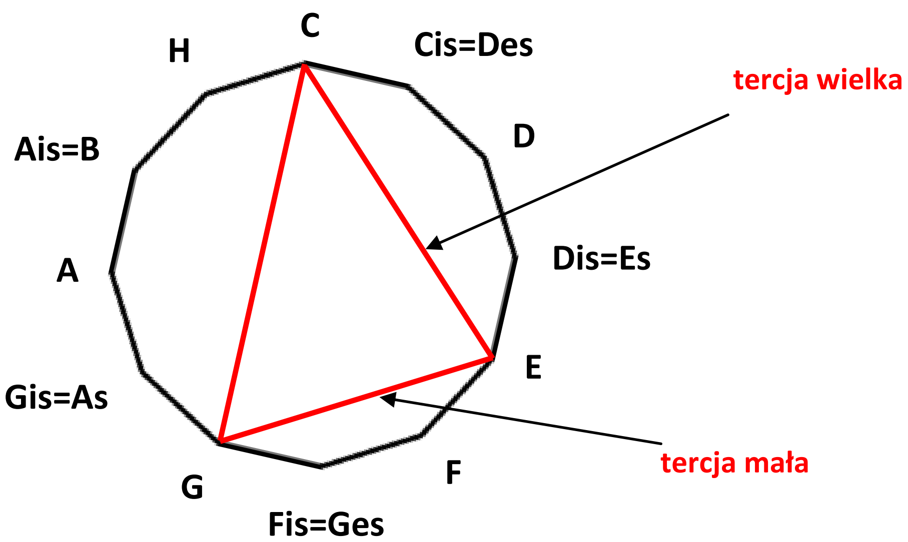
kwintet - zespół składający się z 5 wokalistów lub instrumentalistów
koło kwintowe - graficzny schemat przedstawiający gamy/tonacje w systemie dur-moll uszeregowane według zmieniającej się liczby znaków przykluczowych

Matematyka: **kwintylion** - liczba równa $10^{5\cdot 6}$

5. Trójdźwięki

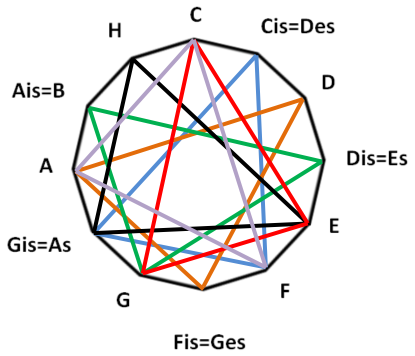
Trójdźwięk to najprostszy akord o budowie tercjowej, składający się z trzech dźwięków nazywanych kolejno: prymą (podstawa akordu), tercją i kwintą. Wyróżnia się 4 podstawowe typy trójdźwięków: durowy (oznaczenie **+**), molowy (oznaczenie ○), zwiększony (oznaczenie **<**) i zmniejszony (oznaczenie **>**). W poniższym zestawieniu prezentuję najważniejsze elementy trójdźwięków.

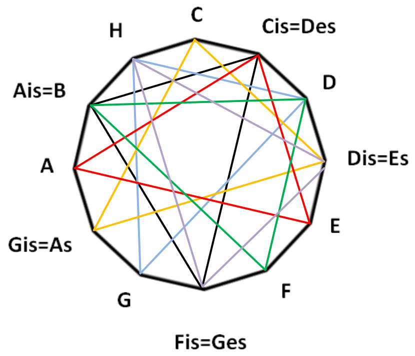
nazwa trójdźwięku	**budowa**	**przykład**	**przykład w zapisie nutowym**[7]
trójdźwięk durowy	tercja wielka i tercja mała	C E G	
trójdźwięk molowy	tercja mała i tercja wielka	C Es G	
trójdźwięk zwiększony	dwie tercje wielkie	C E Gis	
trójdźwięk zmniejszony	dwie tercje małe	C Es Ges	

Powiązania trójdźwięków z matematyką można zobaczyć, jeśli umieścimy je w dwunastokącie foremnym. **Trójdźwięk durowy** zaznaczony w dwunastokącie foremnym ma kąty 45°, 75° i 60°, więc są one w proporcji pitagorejskiej 3:5:4. To oznacza, że trójdźwięk tworzy harmonię.



[7] https://pl.wiktionary.org/wiki/tr%C3%B3jd%C5%BAwi%C4%99k_zmniejszony

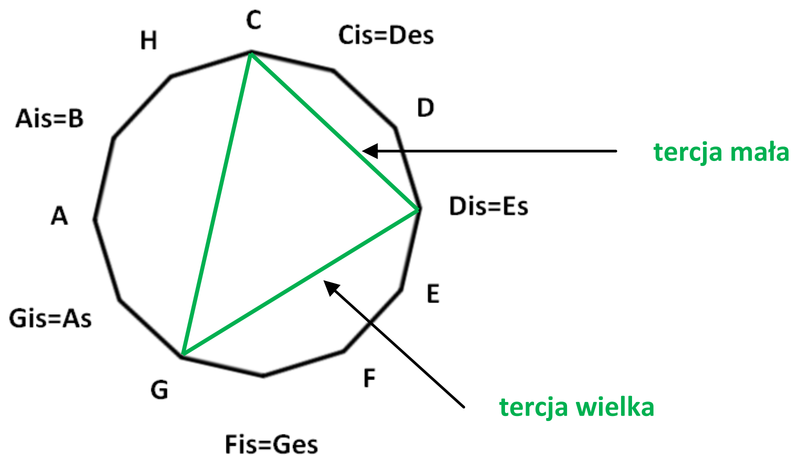
Początkiem trójdźwięku może być każdy z dwunastu wierzchołków, z tego wynika, że może być **dwanaście trójdźwięków durowych**. Zaznaczyłem je w dwunastokącie foremnym różnymi kolorami.





1) C E G
2) Des F As
3) D Fis A
4) Es G B
5) E Gis H
6) F A C
7) Fis Ais Cis
8) G H D
9) As C Es
10) A Cis E
11) B D F
12) H Es Ges

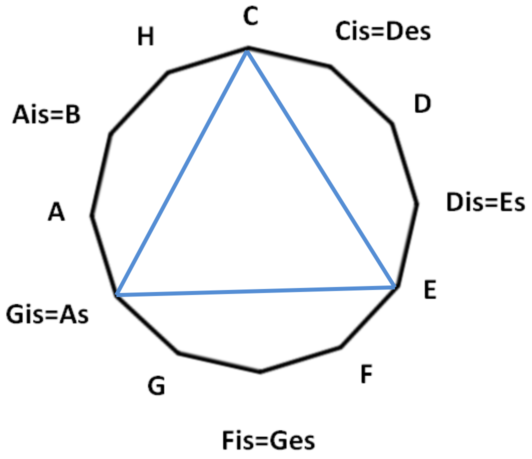
Podobne reguły zastosujemy w przypadku **trójdźwięków molowych**, tylko najpierw budujemy tercję małą, a potem tercję wielką. Możemy utworzyć więc dwanaście trójdźwięków molowych. One także będą tworzyć harmonię, gdyż odpowiadają proporcji pitagorejskiej 3:4:5.



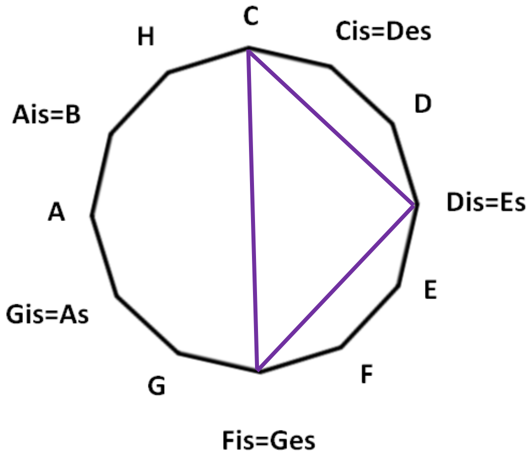
Porównując oba trójkąty utworzone z trójdźwięków durowych i molowych zauważyłem, że są one symetryczne i przystające, więc **widać tutaj przykład zastosowania geometrii w muzyce**.

Następnie zająłem się konstruowaniem trójdźwięków zwiększonych i zmniejszonych w dwunastokącie foremnym. Rysując je zauważyłem, że **tworzą one trójkąt równoboczny** (w pierwszym przypadku) i **trójkąt prostokątny równoramienny** (w drugim przypadku). Było to dla mnie niesamowite odkrycie, bo do tej pory tego nie wiedziałem☺

Przykład **trójdźwięku zwiększonego**:

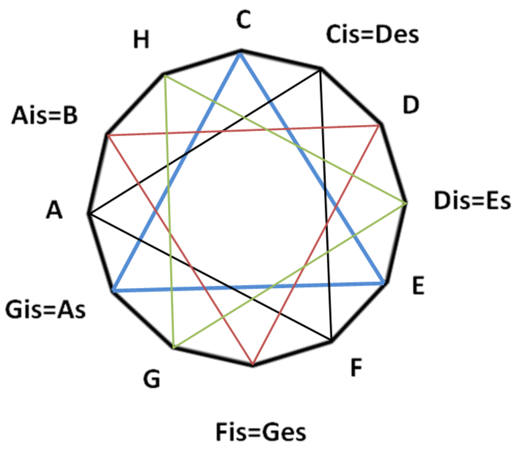


Przykład **trójdźwięku zmniejszonego**:

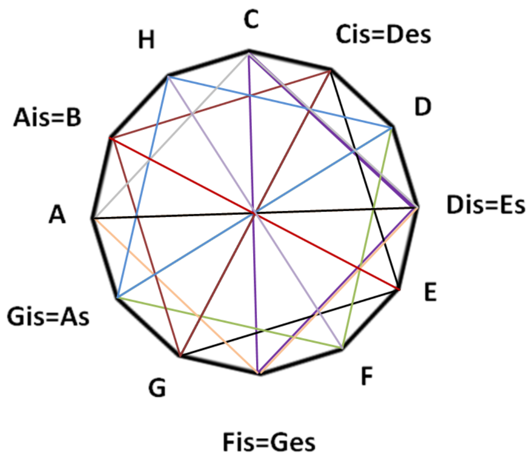


Tak mi się spodobało konstruowanie tych trójdźwięków w dwunastokącie foremnym, że postanowiłem wykonać dla obu wszystkie 12 przykładów. Niektóre z trójkątów nakładają się na siebie, dlatego że są przystające. To kolejny przykład powiązania geometrii z muzyką.

Zestawienie trójdźwięków zwiększonych

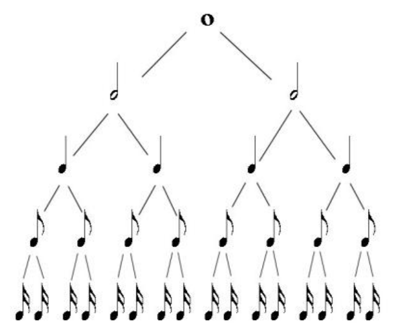


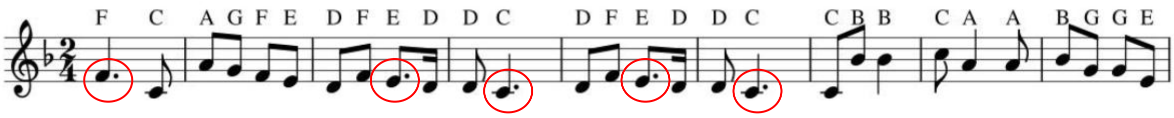
Zestawienie trójdźwięków zmniejszonych



6. Nuty jako wartości rytmiczne

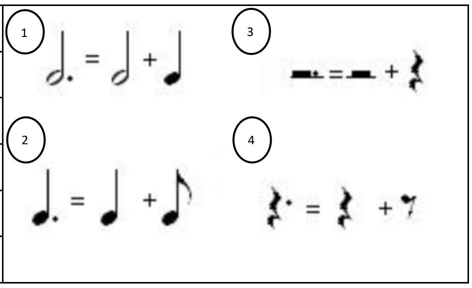
Muzyka nieodłącznie kojarzy się z nutami, a te występują w postaci wartości rytmicznych. **Nuty można porównać do ułamków występujących w matematyce**. Całej nucie przyporządkowana jest wartość 1, a każdej kolejnej połowa poprzedniej. Świetna znajomość ułamków jest więc niezbędna przy tworzeniu utworów muzycznych, bo dobrze skomponowana muzyka brzmi dlatego idealnie, że opiera się na solidnych matematycznych podstawach. Występowanie nut lub pauz o określonym czasie trwania w konkretnym przedziale czasowym składa się na pojęcie rytmu. W poniższej tabeli zestawiłem poszczególne nuty oraz pauzy i ich charakterystyczne cechy.

nazwa	wartość	symbol	pauza	podział regularny wartości nut[8]
cała nuta	1	𝅝	𝄻	
półnuta	1/2	𝅗𝅥	𝄼	
ćwierćnuta	1/4	♩	𝄽	
ósemka	1/8	♪	𝄾	
szesnastka	1/16	𝅘𝅥𝅯	𝄿	

W praktyce - podczas wykonywania utworu muzycznego - całą nutę liczymy na 4, półnutę na 2, ćwierćnutę na 1, ósemkę na ½, a szesnastkę na ¼. Podobnie liczymy wartość pauz. Kiedy analizujemy zapisy nutowe, można też zauważyć, że przy niektórych nutach pojawiają się kropki.

Źródło: musiclessonsbydarek.pl/nuty/patriotyczne/plynie-wisla-plynie/

[8] https://www.google.com/search?q=podzia%C5%82+regularny+warto%C5%9Bci+nut

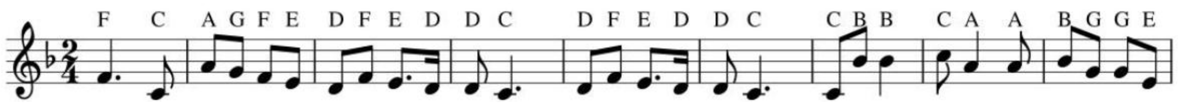
Kropka przy nucie lub pauzie przedłuża jej wartość o połowę, czyli całość stanowi 150% wartości wyjściowej. Z tego wynika, że nuty i pauzy z kropkami liczymy w następujący sposób:

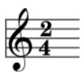
półnuta z kropką (prz. 1)	liczymy na 3	
ćwierćnuta z kropką (prz. 2)	liczymy na 1,5	
ósemka z kropką	liczymy na 3/4	
szesnastka z kropką	liczymy na 3/8	
pauza półnutowa z kropką (prz. 3)	liczymy na 3	
pauza ćwierćnutowa z kropką (prz. 4)	liczymy na 1,5	

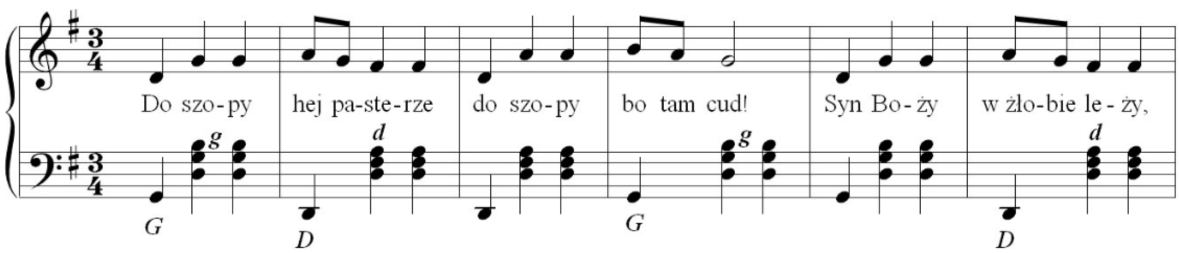
W muzyce, jak w matematyce, musi panować porządek, dlatego wartości rytmiczne są uporządkowane w taktach. Wartość całego taktu określona jest przez metrum.

7. Metrum

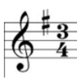
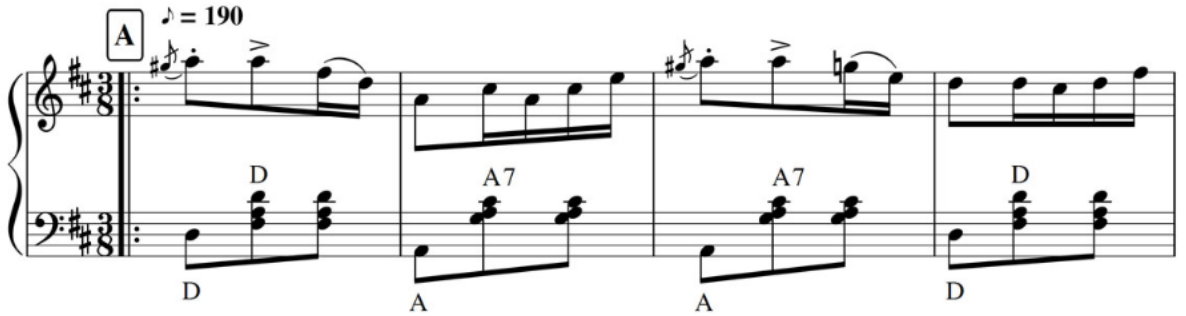
Metrum są to dwie cyfry umieszczone na początku pięciolinii. Górna cyfra mówi o ilości nut w takcie, a dolna określa, jakie są wartości nut.

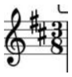
Przykład 1

Źródło: musiclessonsbydarek.pl/nuty/patriotyczne/plynie-wisla-plynie/

Metrum  oznacza, że w takcie znajdują się 2 ćwierćnuty.

Przykład 2



Źródło: http://forum.akordeonowe.pl/darmowe-nuty-akordeonowe/do-szopy-hej-pasterze-nuty/

Metrum  oznacza, że w takcie znajdują się 3 ćwierćnuty.

Przykład 3

Źródło: http://forum.akordeonowe.pl/darmowe-nuty-akordeonowe/oberek-kurpik/

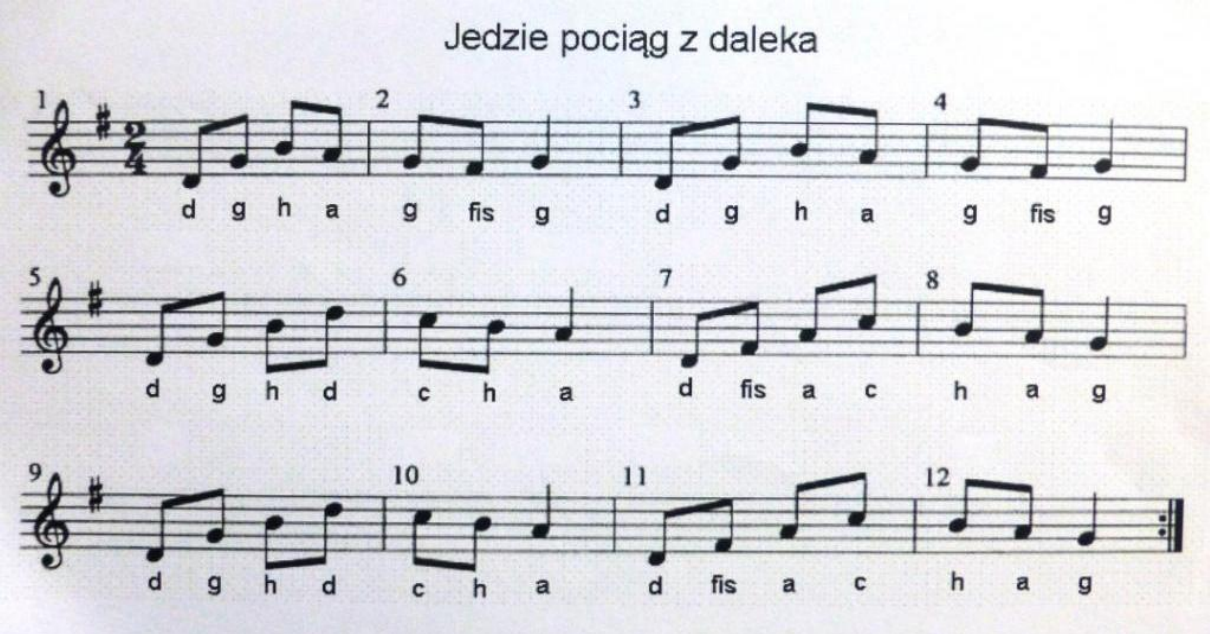
Metrum  oznacza, że w takcie znajdują się 3 ósemki.

Opisując powyższe przykłady, wpadłem na ciekawy pomysł: **Jak obliczyć wartość matematyczną całego utworu?**

Krok 1: Zamieniamy metrum na ułamek.

Krok 2: Liczymy ilość taktów w utworze (często są ponumerowane).

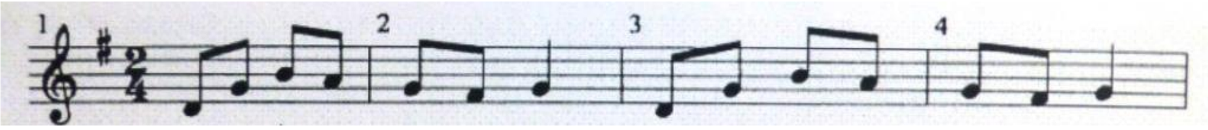
Krok 3: Mnożymy ilość taktów przez ułamek (metrum).

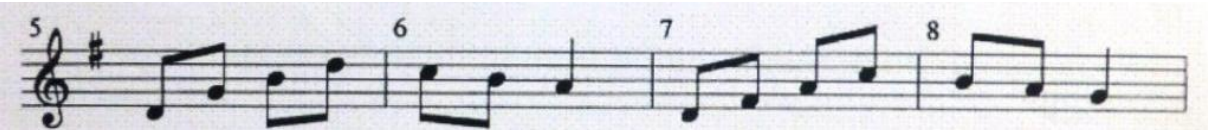
Otrzymany wynik: Wartość utworu podana w całych nutach.

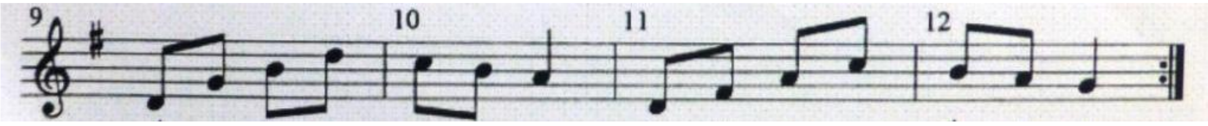
Przykład:

Źródło: https://www.google.com/search?q=Jedzie+poci%C4%85g+z+daleka+nuty

Moje obliczenia:

Metrum zamienione na ułamek:	2/4
Ilość taktów:	12
Obliczenie:	$12 \cdot 2/4 = 6$

Sprawdzenie:

½ + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + 1 + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + 1 +

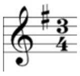
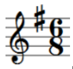


+ ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + 1 + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + 1 +

+ ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + 1 + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + ½ + 1 =

$= (36 \cdot ½) + (6 \cdot 1) = 18 + 6 = 24$

Wynik: 24, co daje 6 całych nut ☺

To jest oczywiście przykład bardzo prostego utworu muzycznego. Jeżeli jednak zastosujemy powyższy wzór do dowolnego utworu o stałym metrum, to zasada ta będzie działać.

I jeszcze jedno spostrzeżenie dotyczące metrum: w takcie ważne jest akcentowanie, które powoduje, że w muzyce metrum  to zupełnie co innego niż , choć według zasad matematycznych te wartości są sobie równe.

8. Działania na wartościach rytmicznych

Każdy uczeń szkoły podstawowej spotkał się na matematyce z pojęciem rozszerzania lub skracania ułamków. Jest to działanie przydatne w obliczeniach, w których trzeba sprowadzić kilka ułamków do wspólnego mianownika (w pierwszym przypadku) lub doprowadzić ułamek do najprostszej postaci (w drugim przypadku).

Rozszerzanie ułamków polega na pomnożeniu licznika i mianownika przez liczbę różną od zera. Ułamki można rozszerzać na dowolnie wiele sposobów, a samo rozszerzanie nie zmienia wartości ułamka, lecz pozwala go zapisać w inny sposób.

Skracanie ułamków polega na dzieleniu licznika i mianownika przez tę samą liczbę różną od zera. W wyniku skracania można doprowadzić ułamek do najprostszej postaci.

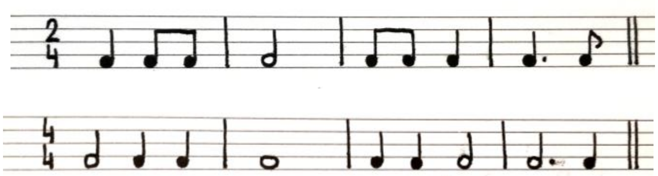
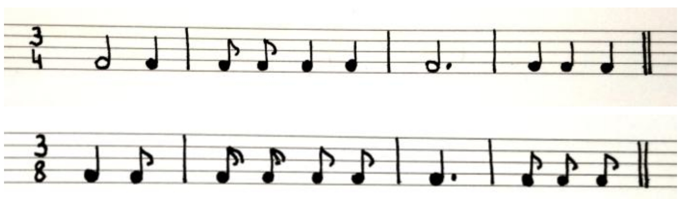
Przykłady

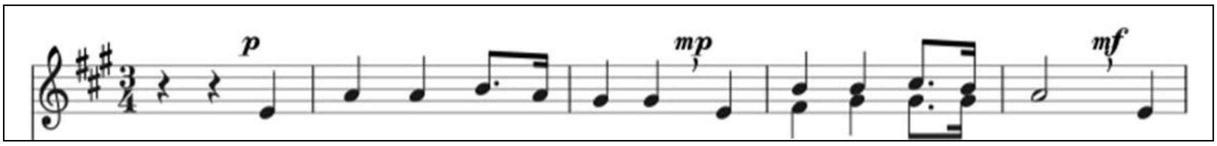
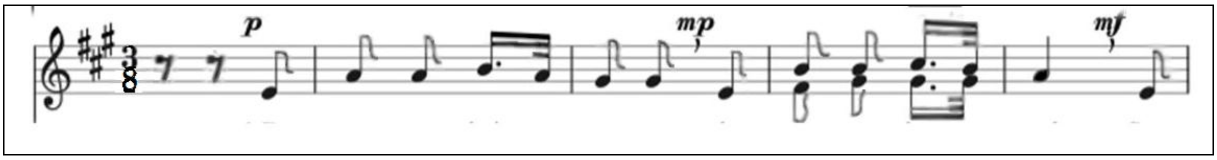
Rozszerzanie ułamków: $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$

Skracanie ułamków: $\frac{36}{48} = \frac{36 : 12}{48 : 12} = \frac{3}{4}$

W muzyce stosowane jest podobne zjawisko: rozszerzanie (proporcjonalne powiększenie) wszystkich wartości rytmicznych w melodii nazywane jest **augmentacją**, natomiast proporcjonalne pomniejszenie wartości rytmicznych - **dyminucją.** Oba te zabiegi stosowane są przede wszystkim w utworach polifonicznych, np. w fugach, nadając im dostojny charakter bez zmiany tempa utworu jako całości.

By lepiej przedstawić oba działania na wartościach rytmicznych, narysowałem własne przykłady.

Augmentacja

Dyminucja

Wykonałem też dyminucję na przykładzie znanej kolędy „Do szopy, hej pasterze” w opracowaniu L. Szopińskiego. Pierwszy obrazek to oryginalny zapis nutowy pierwszej linijki kolędy, a drugi – po przekształceniu przeze mnie.

oryginalny zapis

po przekształceniu

W matematyce powszechne jest przekształcanie wzorów, natomiast w muzyce przekształcić można takty. **Przekształcenie taktów** polega na zmianie metrum z ćwierćnutowego na ósemkowe lub odwrotnie, w taktach o tej samej ilości ósemek, np. 3/4 na 6/8 lub 6/4 na 2/8. Wraz ze zmianą metrum zmianie ulega sposób grupowania wartości rytmicznych w taktach.

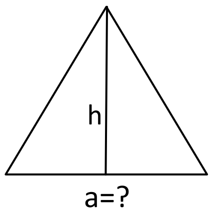
Przykłady

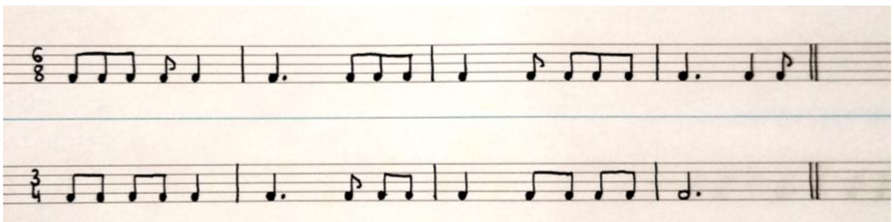
Matematyka: Przekształciłem wzór na pole trójkąta, aby wyznaczyć a.

$P_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \qquad / \cdot 2$

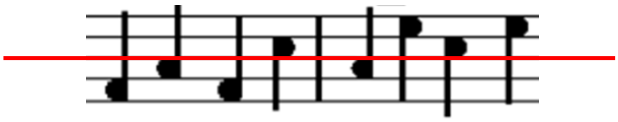
$2 P_\triangle = a \cdot h \qquad / : h \qquad h \neq 0$

$\frac{2P_\triangle}{h} = a$

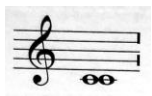
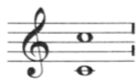
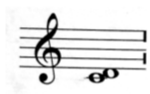
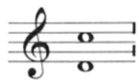
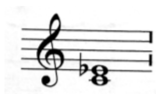
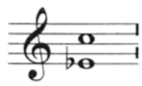
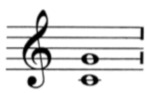
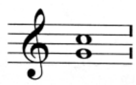
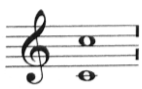
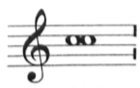
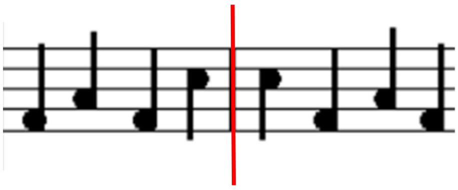
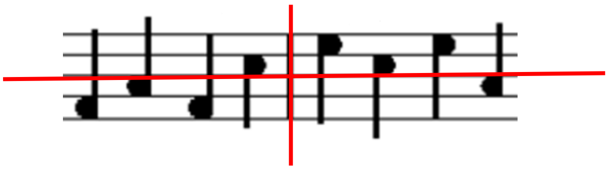


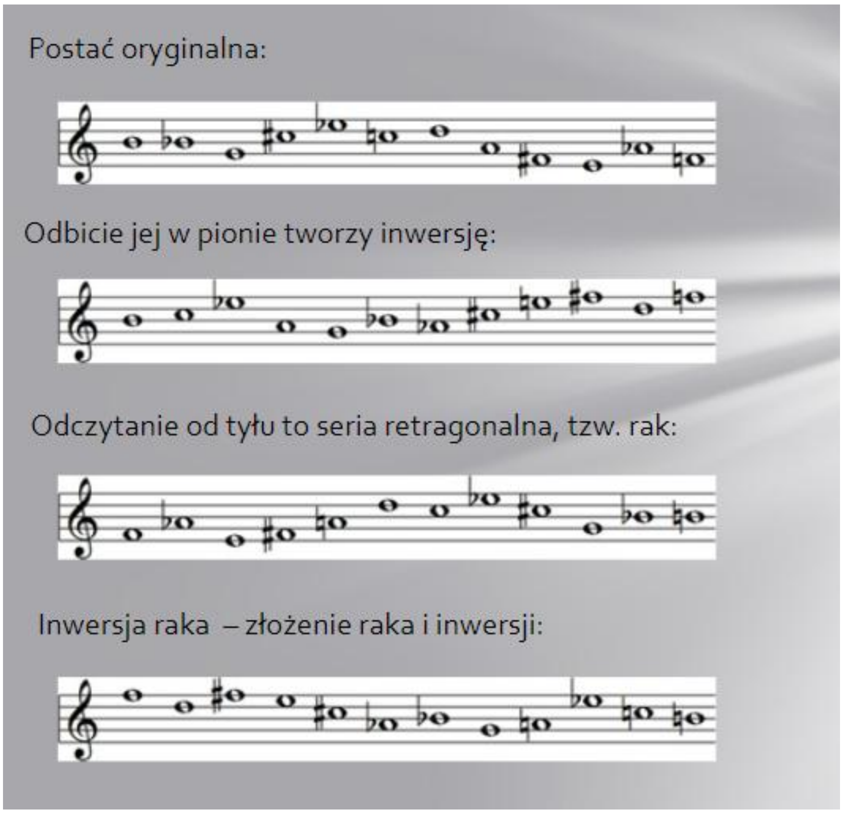
Muzyka: Przekształciłem tematy rytmiczne, zmieniając metrum w taktach.

9. Geometria w muzyce

Kolejnym ciekawym zjawiskiem w muzyce są **przekształcenia geometryczne**, stosowane przez kompozytorów dla urozmaicenia melodii utworu. Badając to zagadnienie, spotkałem się z trzema przykładami przekształceń: inwersją, rakiem i transpozycją.

Inwersja to symetria względem osi poziomej. Jest to odwrócenie kierunku prowadzenia linii melodycznej. Ma miejsce wówczas, gdy niższy dźwięk tworzący interwał staje się dźwiękiem wyższym (przeniesiony o oktawę) i odwrotnie: gdy dźwięk wyższy staje się niższym.

Inwersję interwałów nazywamy także przewrotem. To, co najpierw było u góry, teraz znajduje się na dole i na odwrót. Po inwersji interwałów zmienia się nie tylko kierunek, ale także wielkość interwałów: małe stają się wielkimi, wielkie - małymi, zwiększone - zmniejszonymi i na odwrót. Czyste interwały pozostają czystymi, gdyż nie mają swojego przeciwieństwa.

Zestawiłem w tabeli kilka interwałów i ich przewroty, aby lepiej zobrazować to zagadnienie.

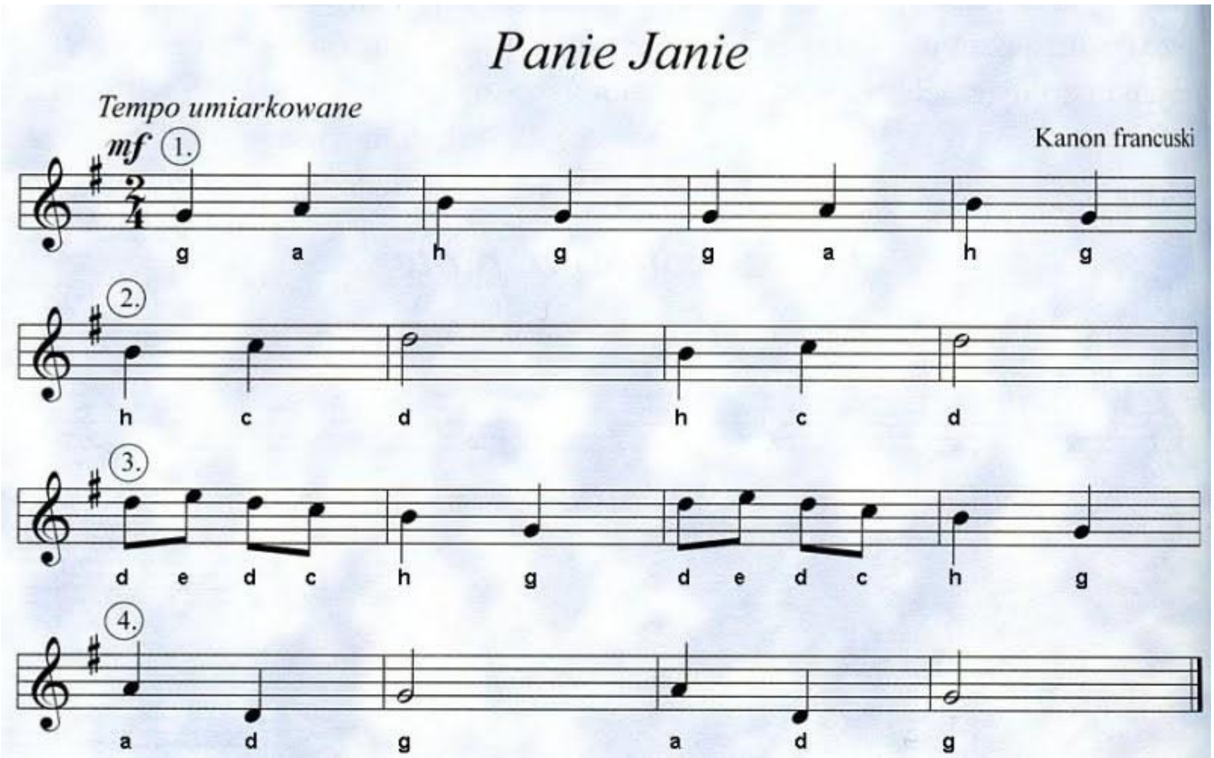
interwał	zapis nutowy	przewrót	zapis nutowy
pryma czysta		oktawa czysta	
sekunda wielka		septyma mała	
tercja mała		seksta wielka	
kwinta czysta		kwarta czysta	
oktawa czysta		pryma czysta	

Rak to symetria względem osi pionowej do pięciolinii. Oznacza to, że fragment melodii zostaje zapisany od końca, czyli w odbiciu lustrzanym.

Rak inwersji to zagranie od końca melodii z odwróconymi interwałami.

W Internecie znalazłem ciekawe zestawienie melodii z różnymi przekształceniami geometrycznymi:[9]



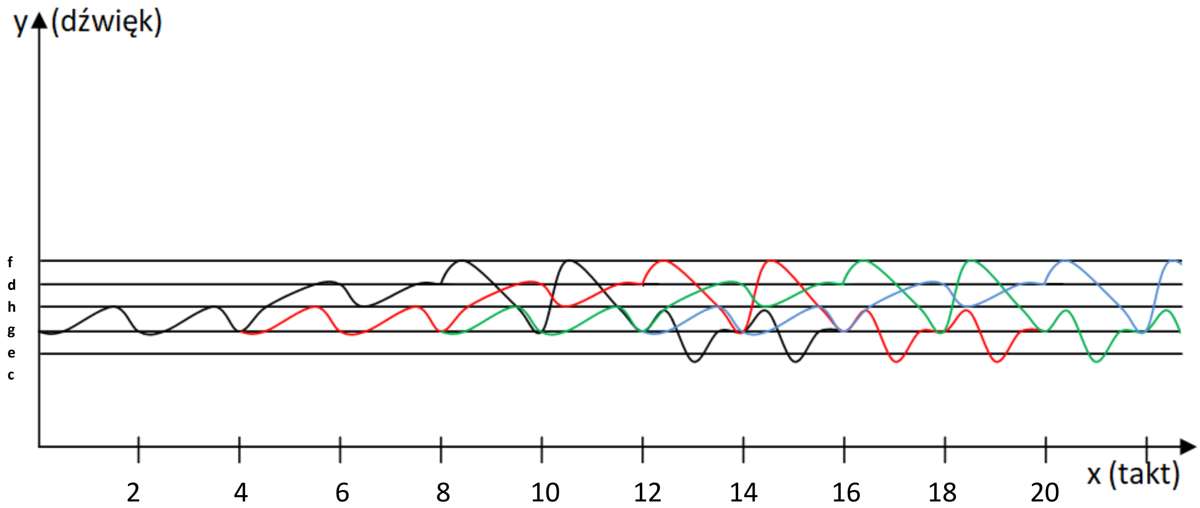
[9] Źródło: https://slideplayer.pl/slide/803805/ - Marlena Fila „Moje katharsis czyli rozmyślania zakochanej w muzyce matematyczki"

Najpopularniejszym i często stosowanym w muzyce przekształceniem geometrycznym jest **transpozycja**, czyli przesunięcie melodii o wektor dodatni. Jednym słowem – chodzi o **kanon**. Melodia wiodąca powtórzona jest w pewnym odstępstwie czasu przez kolejny głos lub głosy. Istotne jest, że głos pierwszy nie milknie, lecz kontynuuje swoją linię melodyczną, stając się tzw. kontrapunktem.

W utworach polifonicznych głos rozpoczynający kanon nazywa się proposta, a odpowiadające mu głosy – riposta. Mistrzowie polifonii potrafili tworzyć różne złożone rodzaje kanonów, np. podwójne lub potrójne, w których imitowano dwie lub nawet trzy melodie jednocześnie. Ciekawe jest to, że przy zastosowaniu pewnych matematycznych wyliczeń można imitować melodię w nieskończoność - jest to **kanon kołowy**.

Jednym ze znanych utworów tego typu jest kanon francuski „Panie Janie”. Kolejne głosy wchodzą z opóźnieniem, a wejście zaznaczone zostało cyfrą w kółku na zapisie nutowym.

Źródło: https://pl-static.z-dn.net/files/d3d/1b43ba8806fefdfa0f3ab8c9fafe3748.jpg

Wykonanie kanonu w chórze czy w wersji instrumentalnej prezentuje się bardzo pięknie i słychać brzmiącą harmonię. Zastanowiło mnie, **jak wyglądałby matematyczny zapis kanonu „Panie Janie”**. Postanowiłem przenieść linię melodyczną na wykres i uzyskałem następujący efekt:



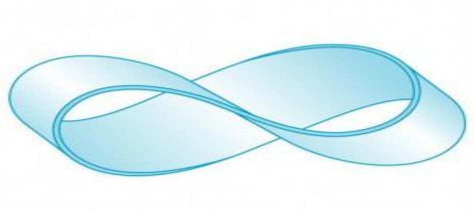
Na linii x wyznaczyłem takty, a kolorami zaznaczyłem wejścia kolejnych głosów.

Natomiast na linii y wyznaczyłem pięciolinię i oznaczyłem wysokość dźwięków na pięciolinii (oktawa razkreślna). Nie ma tutaj wartości liczbowych, ale można powyżej zaznaczyć kolejne oktawy (dwukreślną i trzykreślną), a poniżej oktawę małą i wielką.

Podsumowując: Kanon jako forma muzyczna jest prosty, ale w swej prostocie – wyjątkowy i genialny. Wirtuozerią w tym względzie okazał się Jan Sebastian Bach, który stworzył jednolinijkowy utwór „Quaerendo invenietis” (łac. *szukajcie a znajdziecie*), wchodzący w skład dzieła „Musikalisches Opfer”. Zastosował w nim jednocześnie kilka wyżej opisanych przekształceń geometrycznych i właśnie temu zagadnieniu chciałbym poświęcić kolejny fragment mojej pracy.

10. Co wspólnego ma Bach z Möbiusem?

Kilkakrotnie podczas różnych zajęć i warsztatów matematycznych miałem możliwość wykonać i przetestować właściwości wstęgi Möbiusa. Jest to szczególna powierzchnia jednostronna, która powstaje poprzez sklejenie przeciwległych boków prostokąta po uprzednim obróceniu jednego z końców o 180^o. Brzeg wstęgi tworzy linię zamkniętą, będącą okręgiem, a podczas przesuwania np. ołówka po powierzchni bez odrywania wracamy do punktu wyjścia. Czary-mary? Nie, po prostu matematyka!



Źródło: http://blog.megamatma.pl/niezwykla-wstega-mobiusa/

A jak te własności wykorzystał Bach w swoim utworze?

Rękopis tego słynnego kanonu (*Krebskanon*) składa się z prostej melodii zapisanej w jednej linii. Należy ją zagrać najpierw w przód, a potem wspak. W przypadku, gdy gramy obie melodie jednocześnie, powinny one ze sobą współbrzmieć (to tzw. retrogresja). Na tym jednak nie koniec. Bach dodatkowo zastosował inwersję, czyli odwrócił zapis nutowy „do góry nogami". Jeżeli nuty leżą pomiędzy dwoma grającymi, to każdy z nich czyta je od swojej strony (połączenie retrogresji i inwersji – kanon lustrzany).

Źródło: https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU

Wielki kunszt Bacha zobaczymy jednak wtedy, gdy zastosujemy jednocześnie wszystkie przekształcenia, a efekt tego usłyszymy, gdy umieścimy nuty na wstędze Möbiusa.

Źródło: https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU

Co ciekawe, Jan Sebastian Bach wpadł na ten pomysł prawie 100 lat wcześniej, niż żył August Möbius! Nie bez przyczyny uchodzi więc za geniusza muzyki klasycznej i wirtuoza.

Aby pokazać geniusz Bacha i jego nawiązanie do wstęgi Möbiusem, słynny poszukiwacz związków matematyki i muzyki - Jos Leys - przygotował film prezentujący wykonanie *Krebskanon*. Można go obejrzeć na stronie:

https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU

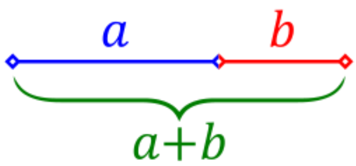
11. Matematyczne inspiracje w muzyce

Nieskończoność

W matematyce pojęciem tym posługujemy się przede wszystkim w znaczeniu liczebności zbioru, a tymczasem muzyka też ma wiele wspólnego z nieskończonością. Od początków istnienia ludzkości do dnia dzisiejszego wciąż powstają nowe utwory, nowe melodie i kompozycje, wariacje i interpretacje dawnych dzieł. Nieskończona wyobraźnia i talent artystów dają prawdziwe pole do popisu, dlatego z zachwytem wspomina się i wciąż odtwarza utwory takich wybitnych kompozytorów jak Haydn, Bach, Beethoven, Mozart, Chopin czy Vivaldi.

Mozart i matematyka

Dla wielu dawnych i współczesnych twórców matematyka była i jest źródłem inspiracji. Na przykład **muzyka Mozarta**, która zachwyca swoją doskonałością, stała się kanonem piękna dzięki zawartej w niej **złotej proporcji**.



Źródło: https://matematyka.fandom.com/pl/wiki/Z%C5%82ota_proporcja

Dostrzegamy ją przede wszystkim w sonatach, które mają wyraźną trójdzielną formę: ekspozycję, przetworzenie i repryzę. Na szczególną uwagę zasługuje *Sonata nr 1 C-Dur KV 279 I*, w której **złoty podział** jest wręcz doskonały albo *Sonata nr 4 in Es-Dur KV 282 II.* Natomiast w *Symfonii nr 40 g-moll KV 550* doskonale słychać **symetrie geometryczne**. Na uwagę zasługuje także znana kompozycja Mozarta *Muzyczna gra w kości (Musikalisches Würfelspiel)* – szesnastotaktowy menuet z instrukcją, jak należy go grać. Najpierw grana jest pierwsza część, a o kolejnych taktach decyduje rzut dwoma kostkami do gry.

Utwór został tak skomponowany, że niezależnie od kolejności każda część pasuje do poprzedniej i następnej, co daje nieskończenie wiele możliwości wykonania tego utworu.[10]

Efekt Mozarta

Prowadzone w XX wieku eksperymenty naukowe A. Tomatis'a i D. Campbell'a pokazały, że muzyką, która najbardziej stymuluje pracę mózgu, jest muzyka Mozarta. Badania Campbella potwierdziły, że wpływa ona nie tylko na układ nerwowy, krwionośny i oddechowy, ale również poprawia pamięć i koncentrację. Zjawisko to zostało nazwane „efektem Mozarta" i miało pokazywać, że **wykonywanie muzyki bardzo rozwija mózg**.

Ja sam zauważam to w otoczeniu swoich kolegów ze szkoły muzycznej. Łatwiej nam zapamiętać nowe pojęcia, wielu z nas ma ponadprzeciętne zdolności matematyczne, świetnie orientujemy się w terenie, nie mamy problemów z czytaniem ze zrozumieniem, naszą mocną stroną jest bardzo dobrze rozwinięta pamięć operacyjna. Jednym słowem – „w duszy nam gra"☺, bo muzyka uczy matematyki i odwrotnie.

Iannis Xenakis i teoria gier

Mówiąc o wybitnych kompozytorach XX wieku, warto wspomnieć o matematyku, architekcie i muzyku – Iannisie Xenakisie. W swoich utworach stosował matematyczne i geometryczne struktury, a to, co najbardziej się liczyło, to „wewnętrzna spójność i matematyczne piękno" muzyki. W muzyce Xenakisa odnaleźć można teorie zbiorów, teorie gier, systemy logiczne i algebraiczne Boole'a.

Arnold Schönberg i kombinatoryka

Kolejnym ciekawym przykładem inspiracji matematycznych w muzyce była **technika dodekafoniczna** (system komponowania), którą stworzył i posługiwał się Arnold Schönberg. Ten genialny kompozytor i matematyk wpadł na pomysł, aby zastosować w utworze serię 12 dźwięków i to w taki sposób, by żaden dźwięk w serii się nie powtarzał. Potraktował wszystkie dźwięki skali chromatycznej jako całkowicie odrębne elementy, a serię jako ciąg tych elementów. Takie komponowanie to nic innego jak **obliczanie permutacji**, a liczba kombinacji wynosi dokładnie 479 001 600, czyli **12!**

[10] http://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=591

Thomas Lehrer i matematyczne piosenki

Poszukując różnych ciekawostek o słynnych muzykach i matematykach natrafiłem na … absolwenta matematyki Uniwersytetu Harwarda - Thomasa Lehrera.

Jako dziecko nie znosił muzyki klasycznej, ale przejawiał zainteresowanie muzyką pop, więc uczył się okiem prywatnego nauczyciela. Wtedy też zaczęła rozwijać się jego druga wielka pasja - zainteresowanie matematyką. Godzinami rozwiązywał łamigłówki logiczne i zadania matematyczne. [Tutaj nasunęło mi się pytanie: Skąd ja to znam? ☺]

„Początkowo chciał studiować anglistykę, ale stwierdził, że musiałby czytać za dużo książek, z których nie wszystkie przypadłyby mu do gustu, rozważał studia chemiczne, ale wtedy za dużo godzin musiałby spędzać w cuchnących laboratoriach. Ostatecznie jego wybór padł na matematykę, gdyż: często zadawali zadania domowe, wiec praktycznie nie trzeba było uczyć się wiele do egzaminów, nie było obowiązkowych zajęć laboratoryjnych, ani długiej listy lektur; to był idealny kierunek dla leniwych studentów.”[11]

Brytyjski historyk muzyczny M. Gilbert zaliczył Thomasa Lehrera do 10 najwybitniejszych osobowości XX wieku. W piosenkach Lehrera odnajdujemy treści matematyczne, np. *Piosenka o pochodnej, Dla każdego epsilon istnieje delta*, *Pierwiastki* lub *Piosenka o suwaku logarytmicznym.*

Opera matematyczna „Cantor – mierzenie nieskończoności”

Na koniec matematycznych inspiracji w muzyce chciałbym wspomnieć o operze Ingomara Grünauera napisanej na cześć Georga Cantora - niemieckiego matematyka i wybitnego skrzypka. W dzieciństwie wyróżniał się wyjątkowymi umiejętnościami matematycznymi, zwłaszcza w trygonometrii, natomiast późniejsze życie zawodowe związał z uniwersytetem w Halle, poświęcając się pracy badawczej nad teorią zbiorów. Jego słynny aforyzm "Istota matematyki tkwi w jej wolności" można sparafrazować do „Istota muzyki tkwi w jej wolności”.

[11] http://www.matematyka.wroc.pl/index.php?q=matematykawsztuce/matematyka-w-piosenkach-toma-lehrera

Podsumowanie

Dla przeciętnego człowieka matematyka i muzyka należą do dwóch różnych światów, jednak patrząc z perspektywy absolwenta szkoły muzycznej i pasjonata matematyki wiem, że muzyka nie może się obejść bez matematyki. Mogę również stwierdzić na podstawie własnego doświadczenia, że można je doskonale połączyć.

Matematyczne myślenie pomaga w zrozumieniu wielu pojęć i zjawisk muzycznych, ćwiczeniu umiejętności technicznych, komponowaniu nowego utworu czy odtwarzaniu dzieł znanych i wybitnych kompozytorów. W matematyce jest podobnie - wszystko musi grać. Jeśli w matematyce zrobimy błąd, to zaraz to widać, a jak w muzyce - to słychać. Dobrze zrobione zadanie przynosi rozwiązanie, a dobrze skomponowana muzyka - arcydzieło wszechczasów.

Mam nadzieję, że w mojej pracy udało mi się osiągnąć zamieszony cel: po prostu wygrać to, co mi w duszy gra – wygrać moją ukochaną matematykę☺

Paweł Nawrocki

Bibliografia i netografia:

Javier Arbonés, Pablo Milrud: Harmonia tkwi w liczbach. Matematyka i muzyka, RBA 2012
Edward Scheinermann: Przewodnik miłośnika matematyki. Arcydzieła dla każdego, Prószyński i S-ka, Warszawa 2019
Florek Lidia, Tomera-Chmiel Ilona, Stachak Tatiana: Nasza muzyka 5, Wyd. Euterpe, Kraków 2014

https://matematyka.poznan.pl/wyklady/matematyka-w-muzyce-i-muzyka-w-matematyce/
http://meakultura.pl/edukatornia/matematyka-muzyki-muzyka-matematyki-873
http://www.matematyka.wroc.pl/matematyka-wokol-nas/w-muzyce
http://www.matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/pierwiastek-z-dwoch-w-muzyce
http://www.matematyka.wroc.pl/doniesienia/czy-bach-wynalazl-wstege-moebiusa
http://www.matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/matematyka-w-piosenkach-toma-lehrera
http://www.matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/harmonia-liczb
http://www.matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/opera-matematyczna
https://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=773
https://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=492
https://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=467
http://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=591
https://cnm.pg.edu.pl/documents/10871/31009714/2011_07_KN.pdf
https://pl.wikipedia.org/wiki/Das_Wohltemperierte_Klavier
https://pl.wikipedia.org/wiki/Zestawienie_podstawowych_interwa%C5%82%C3%B3w
https://pl.wiktionary.org/wiki/tr%C3%B3jd%C5%BAwi%C4%99k_zmniejszony
https://www.google.com/search?q=podzia%C5%82+regularny+warto%C5%9Bci+nut
https://slideplayer.pl/slide/803805/
https://mlodytechnik.pl/i/images/3/4/1/dz0yNjUyJmg9MTIyNQ==_src_16341-01.png
http://forum.akordeonowe.pl/darmowe-nuty-akordeonowe
http://musiclessonsbydarek.pl/nuty/patriotyczne/plynie-wisla-plynie/
https://www.google.com/search?q=Jedzie+poci%C4%85g+z+daleka+nuty
https://pl-static.z-dn.net/files/d3d/1b43ba8806fefdfa0f3ab8c9fafe3748.jpg
http://blog.megamatma.pl/niezwykla-wstega-mobiusa/
https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU
https://matematyka.fandom.com/pl/wiki/Z%C5%82ota_proporcja
http://www.muzykotekaszkolna.pl/wiedza/terminy/