

WSKAZÓWKA

Ćwiczenie NA POCZĄTEK ma przypomnieć uczniom różne metody sporządzania wykresu funkcji. Mogą szkicować każdy wykres od nowa przy pomocy tabeli wartości lub skorzystać z przesunięć wykresu wzdłuż osi układu współrzędnych, które poznali już w klasie pierwszej. Przy tej okazji warto też powiedzieć uczniom, że przesunięcia kształtów stosuje się w projektowaniu graficznym.

EFEKTY KSZTAŁCENIA

Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji $f(x) = ax^2 + q$, $f(x) = a(x - p)^2$;
- podaje własności funkcji $f(x) = ax^2 + q$, $f(x) = a(x - p)^2$;
- wyznacza wzór funkcji kwadratowej otrzymanej przez przesunięcie paraboli wzdłuż osi OX lub osi OY;
- stosuje własności funkcji $f(x) = ax^2 + q$, $f(x) = a(x - p)^2$ do rozwiązywania zadań.

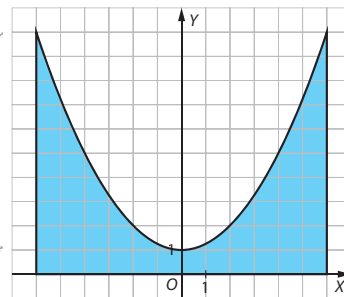
LEKCJA

2

Przesuwanie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ wzdłuż osi OX i OY

NA POCZĄTEK

Projektant mody, aby sporządzić wykrój rękawa, może wykorzystać wykres przedstawiony na rysunku. Widać na nim parabolę $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Czy wiesz, w jaki sposób ją narysować?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykres funkcji $y = ax^2 + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o:

- q jednostek w górę, gdy $q > 0$
- q jednostek w dół, gdy $q < 0$

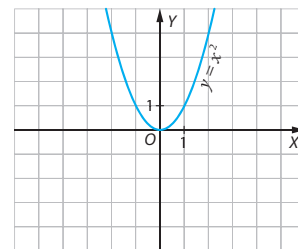
PRZYKŁAD 1

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = x^2 - 4$

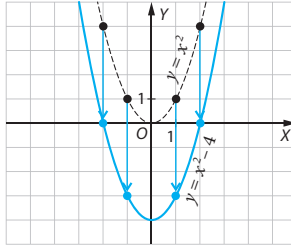
b) $y = x^2 + 2$

a) **KROK 1** Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2$.



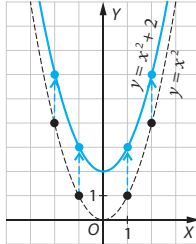
KROK 2 Odczytujemy ze wzoru funkcji, o ile jednostek przesuniemy parabolę $y = x^2$ i w którą stronę.

KROK 3 Przesuwamy wybrane punkty paraboli o 4 jednostki w dół i je łączymy.



b) ROZWIĄZANIE

Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2$ i przesuwamy go o dwie jednostki w górę.



ĆWICZENIE 1

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = 2x^2 - 5$ b) $y = -x^2 + 3$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykres funkcji $y = a(x-p)^2$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$ o:

- p jednostek w prawo, gdy $p > 0$
- p jednostek w lewo, gdy $p < 0$

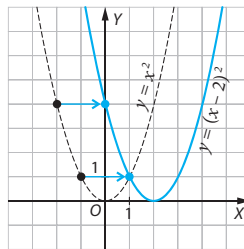
PRZYKŁAD 2

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = (x-2)^2$ b) $y = -2(x+3)^2$

ROZWIĄZANIE

a) Szkicujemy wykres funkcji $y = x^2$ i przesuwamy go o 2 jednostki w prawo, ponieważ $p = 2$ ($p > 0$).



41

ZADANIA

Podaj równanie paraboli, która powstanie przez przesunięcie wykresu funkcji:

- $y = 7x^2$ o 9 jednostek w dół;
- $y = -\frac{1}{5}x^2$ o $\frac{1}{2}$ jednostki w prawo;
- $y = -11x^2$ o $\frac{3}{4}$ jednostki w górę;
- $y = \frac{3}{4}x^2$ o 7 jednostek w lewo.

ROZWIĄZANIE:

- $y = 7x^2 - 9$
- $y = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
- $y = -11x^2 + \frac{3}{4}$
- $y = \frac{3}{4}(x + 7)^2$

ODPOWIEDZI

ĆWICZENIA

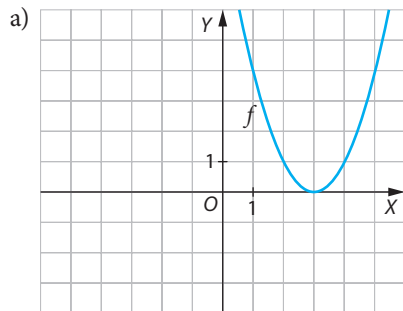
- Wykresem funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $(0, -5)$ i ramionach skierowanych do góry.
 - Wykresem funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $(0, 3)$ i ramionach skierowanych w dół.

ZADANIA

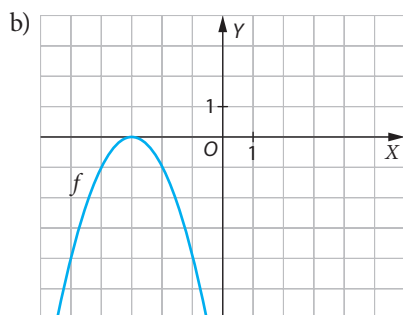
Naszkicuj podaną parabolę. Podaj współrzędne jej wierzchołka i równanie osi symetrii.

- a) $y = (x - 3)^2$
b) $y = -(x + 3)^2$

ROZWIĄZANIE:



$W(3, 0)$, oś symetrii: $x = 3$.



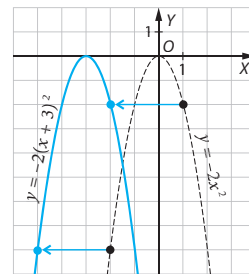
$W(-3, 0)$, oś symetrii: $x = -3$.

LEKCJA 2

- b) Przesuwamy wykres funkcji $y = -2x^2$ o 3 jednostki w lewo, ponieważ:

$$y = -2(x + 3)^2 = -2(x - (-3))^2$$

$$p = -3 (p < 0)$$



ĆWICZENIE 2

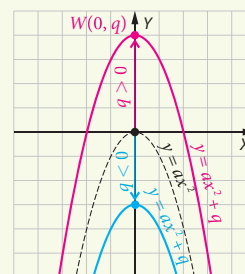
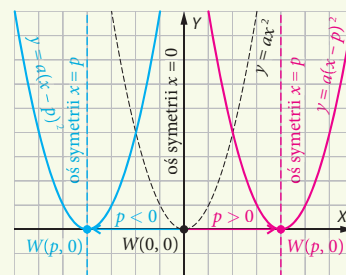
Naszkicuj wykres funkcji.

- a) $y = -(x - 1)^2$
b) $y = 3(x + 2)^2$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Przesunięcie wykresu funkcji $y = ax^2$:

- wzdłuż osi OX zmienia:
 - współrzędną x wierzchołka paraboli,
 - przedziały monotoniczności funkcji, czyli przedziały, w których funkcja jest rosnąca lub malejąca,
 - oś symetrii paraboli.
- wzdłuż osi OY zmienia:
 - współrzędną y wierzchołka paraboli,
 - zbiór wartości funkcji.



ODPOWIEDZI

ĆWICZENIA

2. a) Wykresem funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $(1, 0)$ i ramionach skierowanych w dół.
b) Wykresem funkcji jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-2, 0)$ i ramionach skierowanych do góry.

PRZYKŁAD 3

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli danej wzorem.

a) $y = 2x^2 - 1$ b) $y = (x - 4)^2$

a) **KROK 1** Zauważamy, że wykres funkcji $y = 2x^2 - 1$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu $y = 2x^2$ o 1 jednostkę w dół.

KROK 2 Stwierdzamy, że skoro wierzchołkiem paraboli $y = 2x^2$ jest punkt $(0, 0)$, to wierzchołkiem paraboli $y = 2x^2 - 1$ jest punkt $(0, -1)$.

b) ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $y = (x - 4)^2$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ o 4 jednostki w prawo, więc wierzchołek paraboli ma współrzędne $(4, 0)$.

ĆWICZENIE 3

Podaj współrzędne wierzchołka paraboli danej wzorem.

a) $y = (x + 1)^2$ b) $y = -x^2 + 3$ c) $y = 2(x - 1)^2$ d) $y = -2x^2 - 3$

PRZYKŁAD 4

Podaj zbiór wartości i równanie prostej będącej osią symetrii paraboli o podanym wzorze.

a) $y = x^2 + 5$ b) $y = -5(x - 3)^2$

a) **KROK 1** Zauważamy, że wykres funkcji $y = x^2 + 5$ powstał w wyniku przesunięcia wykresu $y = x^2$ o 5 jednostek w górę.

KROK 2 Stwierdzamy, że skoro zbiorem wartości funkcji $y = x^2$ jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$, to zbiorem wartości funkcji $y = x^2 + 5$ jest przedział $\langle 5; \infty \rangle$.

KROK 3 Zauważamy, że przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY nie zmienia osi symetrii, zatem osią symetrii funkcji $y = x^2 + 5$ jest prosta $x = 0$.

Zbiór wartości: $\langle 5; \infty \rangle$, oś symetrii: $x = 0$.

b) ROZWIĄZANIE

Zbiór wartości: $(-\infty; 0]$, oś symetrii: $x = 3$.

ĆWICZENIE 4

Podaj zbiór wartości i równanie prostej będącej osią symetrii paraboli o podanym wzorze.

a) $y = (x + 2)^2$ b) $y = -x^2 - 2$ c) $y = -(x - 2)^2$

ZADANIA

Podaj równanie paraboli o podanych współrzędnych jej wierzchołka oraz współczynnika a .

a) $a = 4$, $W(2, 0)$

b) $a = -5$, $W(-3, 0)$

c) $a = -\frac{1}{2}$, $W(0, -6)$

d) $a = \frac{3}{4}$, $W(0, \frac{1}{2})$

ROZWIĄZANIE:

a) $y = 4(x - 2)^2$

b) $y = -5(x + 3)^2$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 6$

d) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

3. a) $(-1, 0)$ b) $(0, 3)$ c) $(1, 0)$ d) $(0, -3)$

4. a) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$, oś symetrii: $x = -2$

b) $ZW = (-\infty; -2]$, oś symetrii: $x = 0$

c) $ZW = (-\infty; 0]$, oś symetrii: $x = 2$