



MINISTERSTWO EDUKACJI
i NAUKI



Andrzej Zych

**Wyznaczanie obciążeń w układach statycznych,
kinematycznych i dynamicznych 311[20].O2.01**

Poradnik dla ucznia

Wydawca

**Instytut Technologii Eksploatacji – Państwowy Instytut Badawczy
Radom 205**

Recenzenci:

mgr inż. Regina Mroczek

mgr inż. Wiesław Wiejowski

Opracowanie redakcyjne:

mgr inż. Katarzyna Maćkowska

Konsultacja:

dr inż. Zbigniew Kramek

Korekta:

mgr Edyta Koziel

Poradnik stanowi obudowę dydaktyczną programu jednostki modułowej 311[20].O2.01 Wyznaczanie obciążeń w układach statycznych, kinematycznych i dynamicznych zawartego w programie nauczania dla zawodu technik mechanik.

Wydawca

Instytut Technologii Eksploatacji – Państwowy Instytut Badawczy, Radom 2005

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie	3
2. Wymagania wstępne	4
3. Cele kształcenia	5
4. Materiał nauczania	6
4.1. Podstawy statyki	6
4.1.1. Materiał nauczania	6
4.1.2. Pytania sprawdzające	9
4.1.3. Ćwiczenia	10
4.1.4. Sprawdzian postępów	11
4.2. Płaski zbieżny układ sił	12
4.2.1. Materiał nauczania	12
4.2.2. Pytania sprawdzające	14
4.2.3. Ćwiczenia	14
4.2.4. Sprawdzian postępów	16
4.3. Dowolny płaski układ sił	17
4.4.1. Materiał nauczania	17
4.4.1. Pytania sprawdzające	23
4.4.1. Ćwiczenia	23
4.4.1. Sprawdzian postępów	26
4.4. Kinematyka punktu materialnego i ciała sztywnego	27
4.4.1. Materiał nauczania	27
4.4.2. Pytania sprawdzające	35
4.4.3. Ćwiczenia	35
4.4.4. Sprawdzian postępów	39
4.5. Dynamika	40
4.5.1. Materiał nauczania	40
4.5.2. Pytania sprawdzające	45
4.5.3. Ćwiczenia	46
4.5.4. Sprawdzian postępów	48
5. Sprawdzian osiągnięć	49
6. Literatura	55

1. WPROWADZENIE

Poradnik pomoże Ci wzbogacić wiedzę oraz kształtować umiejętności o statyce, kinematyce i dynamice. Będzie to rozszerzenie wiadomości z fizyki. Wiadomości te przydatne będą w projektowaniu maszyn i urządzeń oraz pomogą Ci zrozumieć wiele zjawisk z mechaniki maszyn.

W poradniku zamieszczono:

- wymagania wstępne, wykaz umiejętności, jakie powinieneś mieć już ukształtowane, abyś bez problemów mógł korzystać z poradnika,
- cele kształcenia, wykaz umiejętności, jakie ukształtujesz podczas pracy z poradnikiem,
- materiał nauczania, „pigułkę” informacji niezbędnych do opanowania treści jednostki modułowej,
- zestaw pytań przydatny do sprawdzenia, czy już opanowałeś podane treści,
- ćwiczenia pomogą Ci zweryfikować wiadomości teoretyczne oraz ukształtować umiejętności praktyczne,
- sprawdzian osiągnięć, przykładowy zestaw zadań i pytań. Pozytywny wynik sprawdzianu potwierdzi, że dobrze pracowałeś podczas lekcji i że nabrałeś wiedzy i umiejętności z zakresu tej jednostki modułowej,
- literaturę uzupełniającą.

Na początku pracy z poradnikiem zapoznaj się z wymaganiami wstępnymi. Jeżeli niedokładnie masz je opanowane, to powinieneś uzupełnić braki. W razie potrzeby możesz poprosić nauczyciela.

Następnie zapoznaj się ogólnie z celami kształcenia. Osiągnięcie celów kształcenia będą sprawdzane za pomocą testów końcowych, więc uświadomienie sobie tego powinno ułatwić Ci pracę z poradnikiem.

Materiał nauczania podzielony jest na porcje. Na początku dokładnie przeczytaj wiadomości teoretyczne. Następnie samodzielnie odpowiedz na pytania sprawdzające.

Teraz powinieneś przystąpić do ćwiczeń. Postaraj się wykonać je samodzielnie. Możesz również skonsultować się z kolegami i razem rozwiązać problem.

Po zakończeniu ćwiczeń wracaj zawsze do celów i odpowiedz sobie na pytanie czy je opanowałeś. Pomocą będzie sprawdzian osiągnięć.

Na końcu znajduje się test sprawdzający Twoje wiadomości i umiejętności.

2. WYMAGANIA WSTĘPNE

Przystępując do realizacji programu nauczania jednostki modułowej powinieneś umieć:

- zastosować układ SI,
- wykonać działania na jednostkach układu SI.
- posłużyć się podstawowymi pojęciami z fizyki takimi jak masa, siła, prędkość, przyspieszenie,
- skorzystać z różnych źródeł informacji,
- kreślić figury geometryczne, proste prostopadłe, równoległe.

3. CELE KSZTAŁCENIA

W wyniku realizacji programu jednostki modułowej powinieneś umieć:

- rozróżnić modele ciał rzeczywistych,
- wykonać działania na wektorach,
- rozróżnić rodzaje sił,
- obliczyć siłę i ciężar mając daną masę i przyspieszenie,
- rozróżnić rodzaje więzów i ich reakcje,
- wyznaczyć reakcje podpór,
- wyznaczyć siłę składową metodą wieloboku i równoległoboku,
- rozłożyć siły na dwie składowe,
- obliczyć wartość siły wynikowej dla układu sił zbieżnych,
- podać warunki równowagi płaskiego i przestrzennego układu sił zbieżnych,
- obliczyć moment siły,
- złożyć siły dowolnego płaskiego układu sił metodą wieloboku sznurowego,
- wyznaczyć warunki równowagi dowolnego płaskiego i przestrzennego układu sił,
- obliczyć reakcje belek,
- określić środek ciężkości linii i płaszczyzny,
- obliczyć siłę tarcia,
- wymienić układy odniesienia stosowane w kinematyce,
- rozróżnić ruchy: płaski, postępowy i obrotowy ciała sztywnego,
- rozróżnić parametry ruchu prostoliniowego, krzywoliniowego,
- rozróżnić parametry ruchu po okręgu,
- obliczyć przyspieszenia w ruchu jednostajnym i zmiennym,
- obliczyć prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu ciała sztywnego,
- wykonać plany prędkości i przyspieszeń członów,
- obliczyć prędkość w przekładni planetarnej,
- rozróżnić dynamiczne równania ruchu punktu materialnego,
- zapisać równanie dynamiczne ruchu ciała sztywnego w ruchu postępowym i obrotowym,
- obliczyć masę zredukowaną (moment bezwładności) mechanizmu,
- obliczyć pracę, moc i sprawność,
- rozróżnić wyważanie statyczne i dynamiczne,
- obliczyć reakcje dynamiczne,
- obliczyć straty energii przy uderzeniu.

4. MATERIAŁ NAUCZANIA

4.1. Podstawy statyki

4.1.1. Materiał nauczania

Teoretyczne modele ciał

Części maszyn mają różne kształty. W mechanice technicznej, aby wykonać obliczenia, musimy dokonać pewnych uproszczeń – posłużyć się tzw. „modelami ciał”.

Możemy wyróżnić następujące modele ciał:

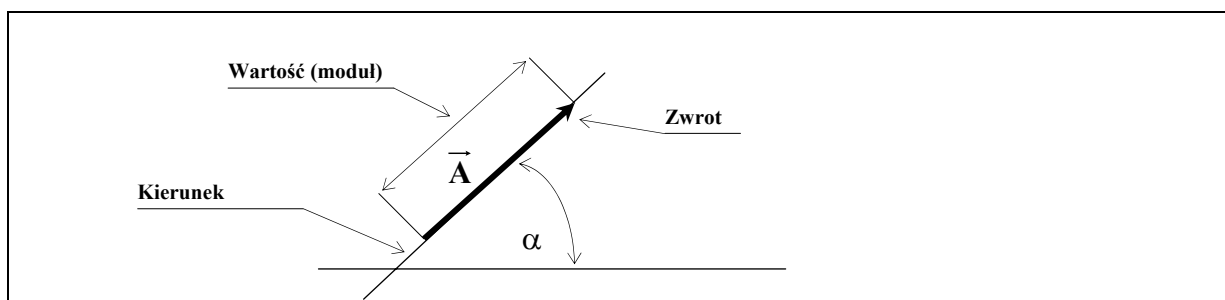
- punkt materialny – jest to punkt geometryczny, w którym skupiona jest cała masa,
- ciało sztywne – jest to układ punktów materialnych ze sobą związanych (odcinek będzie modelem belki),
- ciało sprężyste – jest to ciało, które pod wpływem sił zewnętrznych odkształca się, a po odjęciu siły powraca do swojej pierwotnej postaci,
- ciało sprężysto-plastyczne – jest to ciało, które pod wpływem sił zewnętrznych odkształca się, a po odjęciu sił nie powraca całkowicie do swojej pierwotnej postaci. Częściowo odkształca się sprężysto, a częściowo plastycznie.

Działania na wektorach

W mechanice technicznej mamy do czynienia z wielkościami takimi jak: czas, siła, prędkość, przyspieszenie, praca. Wielkości te możemy podzielić na:

- wielkości skalarne (skalary) – czas, temperatura, praca, moc,
- wielkości wektorowe (wektory) – siła, prędkość, przyspieszenie.

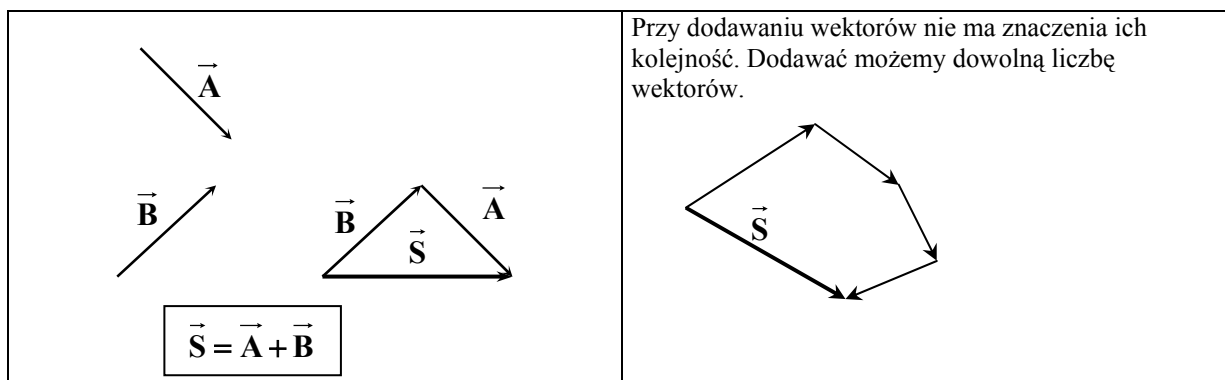
O ile skalarom możemy przypisać tylko wielkość liczbową, (temperatura 50°C , to wektorom przypisujemy wartość liczbową (moduł), kierunek działania i zwrot. Wektor oznaczamy tak, jak przedstawiono to na rys. 1.



Rys. 1. Graficzne przedstawienie wektora

Dodawanie skalarów przeprowadza się wykonując zwykłe działanie matematyczne. Na przykład suma dwóch temperatur będzie wynosiła: $50^{\circ}\text{C} + 30^{\circ}\text{C} = 80^{\circ}\text{C}$.

W przypadku wektorów posiadających wartość (moduł) kierunek i zwrot dodawanie wektorów możemy przeprowadzić metodą geometryczną. Dodawanie geometryczne przedstawione jest na rysunku 2. Przyjmujemy określoną podziałkę, tak aby długość wektora oznaczała jego moduł. Następnie do końca pierwszego wektora dorysowujemy następny wektor. Moduł wektora sumy odczytujemy mierząc długość i mnożąc przez podziałkę. Innym sposobem obliczenia modułu jest obliczenie za pomocą wzoru podanego na rysunku 2.

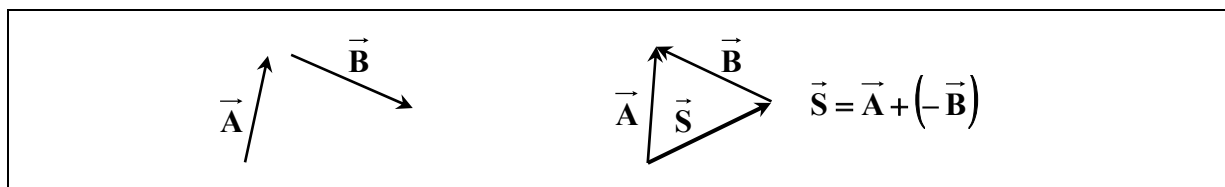


$$|\vec{S}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A} \times \vec{B}| \cos(\angle A, B)$$

przy czym: $(\angle A, B)$ – kąt zawarty pomiędzy wektorami A i B

Rys. 2. Geometryczne dodawanie wektorów oraz analityczne obliczenie wartości modułu

Różnica wektorów (odejmowanie wektorów) równa się sumie wektora pierwszego i drugiego ze zwrotem przeciwnym.

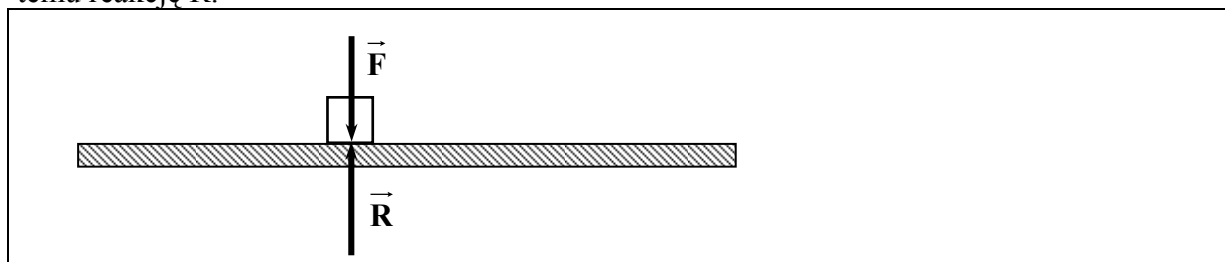


Rys. 3. Odejmowanie wektorów

Klasyfikowanie sił

Występujące w mechanice siły możemy podzielić na siły wewnętrzne i siły zewnętrzne. Siły wewnętrzne podzielić możemy na siły międzycząsteczkowe (działające pomiędzy cząsteczkami materiału) oraz siły napięcia (siły wewnętrzne działające na skutek przyłożenia sił zewnętrznych, np. siły wewnątrz drutu sprężyny, siła napięcia linki, na której zaczepiono ciężar).

Siły zewnętrzne podzielić możemy na czynne i reakcje. Przedstawia to rys. 4, na którym ciało położone na płaszczyźnie wywiera na podłoże siłę czynną F, a podłoże przeciwstawia temu reakcję R.



Rys. 4. Graficzne przedstawienie siły czynnej F i reakcji R

Wartość siły możemy obliczyć mnożąc masę ciała przez jego przyspieszenie.

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} \text{ [N]} \quad [\text{N}] = [\text{kg} \cdot \text{m/s}^2] - \text{Niuton}$$

lub w przypadku ciężarów:

$$\mathbf{G} = \mathbf{m} \mathbf{g} \text{ [N]} \quad \mathbf{g} = 9,81 \text{ m/s}^2 - \text{przyspieszenie ziemskie}$$

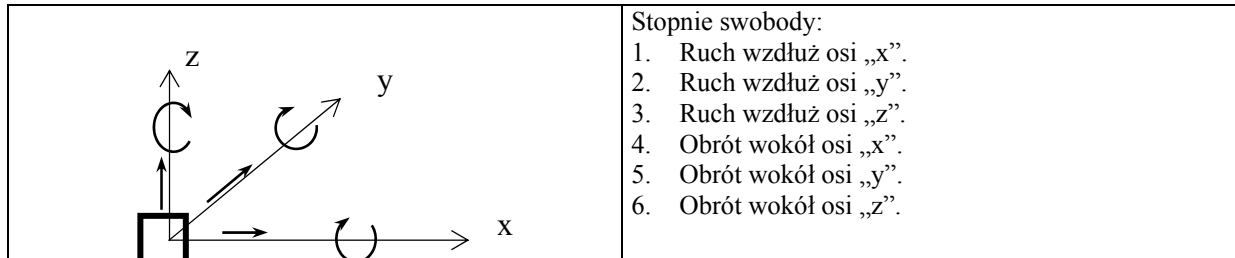
gdzie: m – masa ciała [kg]

$$\mathbf{a} - \text{przyspieszenie ciała} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Więzy i ich reakcje

Ciała możemy podzielić na ciała swobodne i ciała nieswobodne. Ciała swobodne nie mają ograniczonej swobody ruchu. Np. kamień lecący w powietrzu. Ciała nieswobodne to takie, których swoboda ruchu została ograniczona czynnikami zewnętrznymi. Na przykład przedmiot leżący na stole ma ograniczony ruch w dół. Ograniczenie to powoduje blat stołu. Czynniki ograniczające ruch nazywamy więzami (w przypadku stołu więzem jest blat stołu).

Ciała swobodne posiadają sześć stopni swobody. Są to przesunięcia na boki, przesunięcia w przód i w tył oraz trzy obroty. Graficznie przedstawione jest to na rysunku 5.

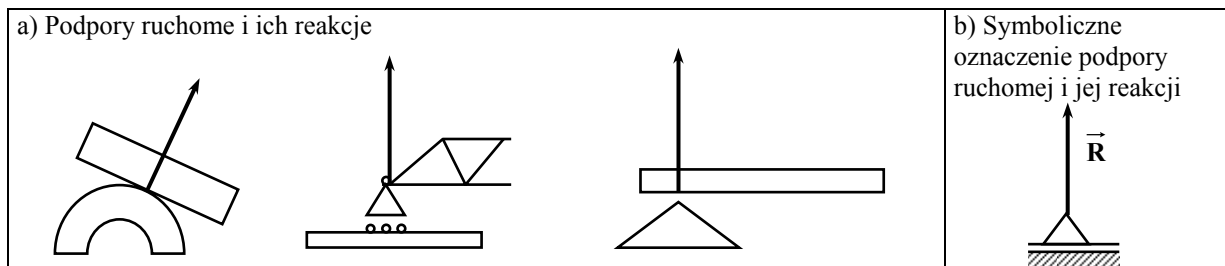


Rys. 5. Graficzne przedstawienie stopni swobody

Przykładem odebrania jednego stopnia swobody jest zaczepienie ciężaru na linie. Lina odbiera jeden stopień swobody ruchu w dół. Pozostałe stopnie nie są odebrane. Ciężar może się przemieszczać na boki, w przód i tył, obracać wokół osi pionowej (x), poziomej (y) i biegnącej włąb (z).

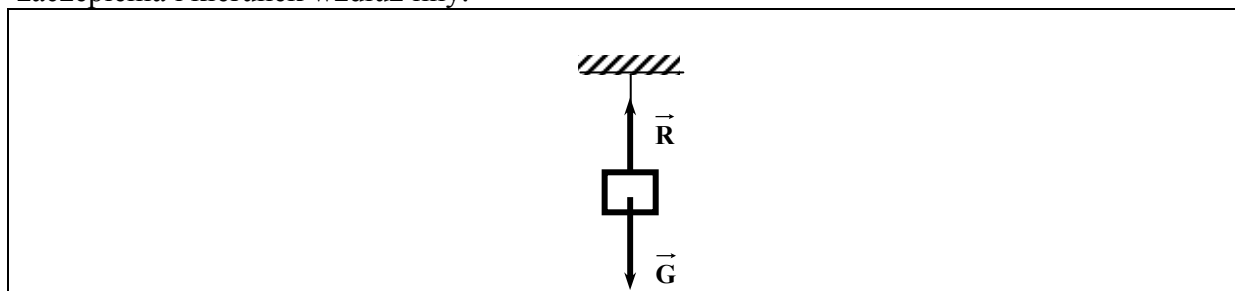
Więzy odbierające stopnie swobody wywołują reakcje. Podstawowe rodzaje więzów i powstające w nich reakcje możemy podzielić na: podpory ruchome, podpory stałe, więzy wiotkie.

Przykłady podpór ruchomych, ich symbolicznego oznaczenia oraz reakcje w nich powstające, przedstawia rysunek 6. Rysunek „6a” przedstawia dwa przykłady podpór ruchomych. Rysunek „6b” przedstawia podporę ruchomą z zaznaczoną reakcją, która jest prostopadła do powierzchni napierającej.



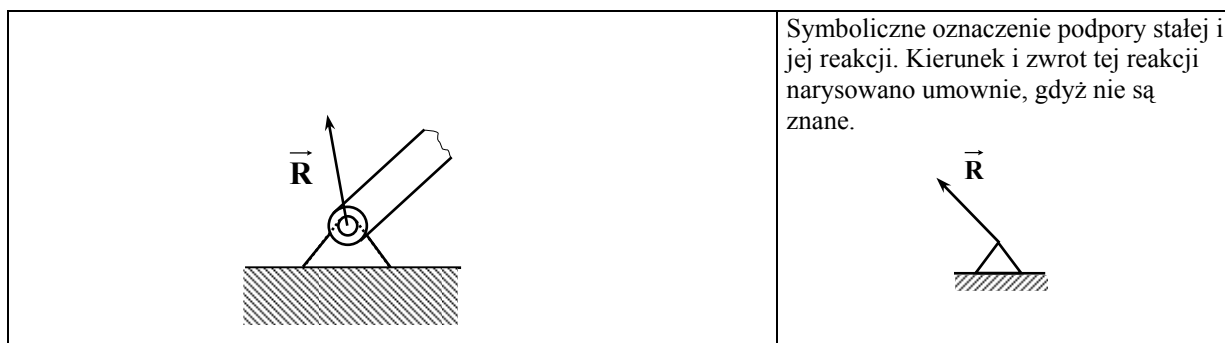
Rys. 6. Podpory ruchome: a) oparcie na gładkim walcu i oparcie na pryzmie, b) symboliczne przedstawienie podpory i występującej w niej reakcji

Przykład więzy wiotkiej przedstawia rysunek 7. Reakcja ma początek w punkcie zaczepienia i kierunek wzdłuż liny.



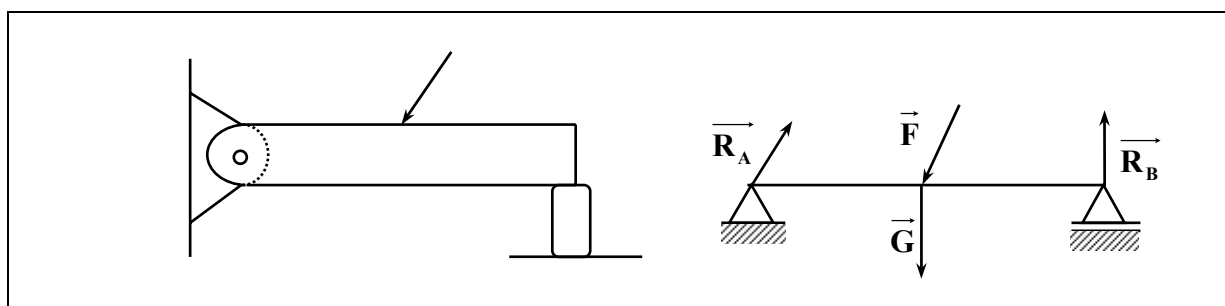
Rys. 7. Oznaczenie reakcji w więzie wiotkim

Przykład podpory stałej przedstawiony jest na rysunku 8. Reakcja w tej podporze ma punkt zaczepienia w punkcie przyłożenia, natomiast nieznanymi jest jej kierunek i zwrot.



Rys. 8. Podpora stała i reakcja w niej

W statyce dokonujemy uproszczeń sprowadzając wszystko do modeli. Przykład takich uproszczeń przedstawiony jest na rysunku 9. Znamy kierunek i zwrot reakcji R_B , natomiast nie znamy ani kierunku, ani zwrotu reakcji R_A .



Rys. 9. Przykład układu statycznego i jego model

4.1.2. Pytania sprawdzające

Odpowiadając na pytania, sprawdzisz, czy jesteś przygotowany do wykonania ćwiczeń.

1. Jakich wyróżniamy modele ciał rzeczywistych?
2. Jak brzmi definicja punktu materialnego?
3. Jak brzmi definicja ciała sztywnego?
4. Jak brzmi definicja ciała sprężystego?
5. Jak brzmi definicja ciała sprężysto-plastycznego?
6. Jak dodajemy wielkości skalarne?
7. Jak dodajemy wielkości wektorowe?
8. Jak dzielimy siły wewnętrzne?
9. Jak dzielimy siły zewnętrzne?
10. Jak obliczamy siłę mając masę i przyspieszenie?
11. Jak obliczamy ciężar ciała?
12. W jakich jednostkach mierzymy siłę?
13. Co to są więzy?
14. Ile stopni swobody może posiadać ciało swobodne?
15. Jakie są rodzaje więzów?
16. Jakie dane, dotyczące reakcji, możemy określić dla podpory ruchomej?
17. Jakie dane, dotyczące reakcji, możemy określić dla podpory stałej?
18. Jakie dane, dotyczące reakcji, możemy określić dla więzów wiotkich?

4.1.3. Ćwiczenia

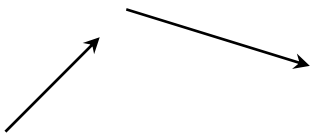
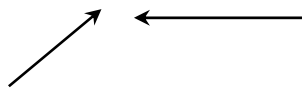
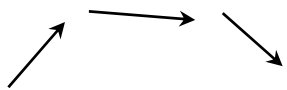
Ćwiczenie 1

Dodaj wektory metoda wykreślną.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) wykorzystasz sposób geometrycznego dodawania wektorów.
- 2) Dodać przedstawione wektory.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Linijka z podziałką i trójkąt, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 2

Oblicz siły i ciężary dla podanych ciał materialnych.

Siły			Ciężary		
$m = 10 \text{ kg},$ $a = 5 \text{ m/s}^2$	$m = 70 \text{ kg},$ $a = 4,2 \text{ m/s}^2$	$m = 57 \text{ kg},$ $a = 0,2 \text{ m/s}^2$	$m = 10 \text{ kg},$	$m = 70 \text{ kg},$	$m = 57 \text{ kg},$
F=	F=	F=	G =	G =	G =

Sposób wykonania ćwiczenia

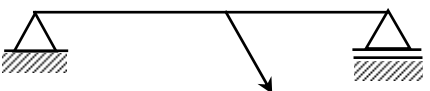

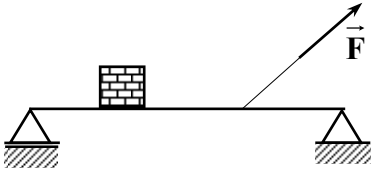
Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) skorzystać z wzorów na siłę i ciężar,
- 2) przeprowadzić obliczenia, wpisać wyniki podając właściwe jednostki.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 3

Wyznacz reakcje w więzach dla przedstawionych poniżej przypadków.

Układ obciążony siłą zewnętrzną	
Ciężar zwisający na linie	
Belka obciążona ciężarem i ciągnięta liną z siłą F	

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) przypomnieć sobie sposób wyznaczania reakcji w więzach,
- 2) wrysować reakcje w podporach oraz w więzie wiotkim,
- 3) dla ostatniego przykładu narysować schemat układu, wrysować siłę pochodzącą od masy ciała (ciężar) i wyznaczyć reakcje.

Wyposażenie stanowiska pracy:

Linijka, trójkąt, literatura uzupełniająca.

4.1.4. Sprawdzian postępów

Czy potrafisz:

- 1) dodać wektory metodą geometryczną?
- 2) wyznaczyć reakcję w podporze ruchomej?
- 3) wyznaczyć reakcję w podporze stałej?
- 4) wyznaczyć reakcję w więzie wiotkim?
- 5) obliczyć ciężar ciała mając podaną jego masę?
- 6) obliczyć siłę mając podaną masę i przyspieszenie?

Tak **Nie**

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4.2. Płaski zbieżny układ sił

4.2.1. Materiał nauczania

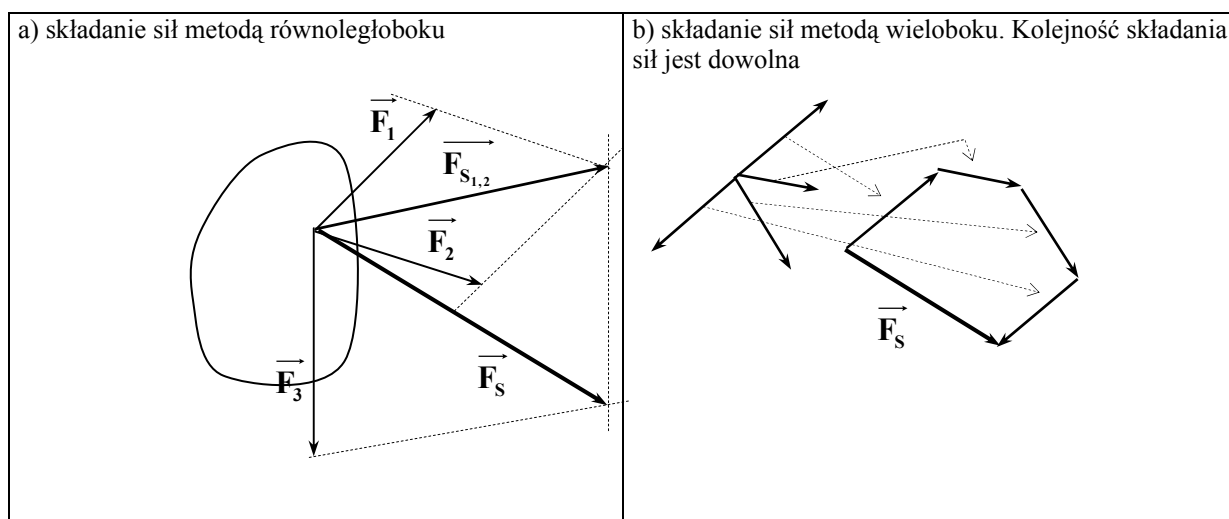
Składanie sił zbieżnych

Siłami zbieżnymi nazywamy siły, których linie działania zbiegają się w jednym punkcie. Jeżeli mamy układ sił, w którym zbiegają się one w jednym punkcie, to taki układ możemy uprościć poprzez zastąpienie wszystkich sił jedną, tak zwaną „siłą składową”.

Siły w zbieżnym układzie sił możemy dodawać dwoma metodami:

- metodą równoległoboku – rysunek 10.a,
- metodą wieloboku – rysunek 10.b.

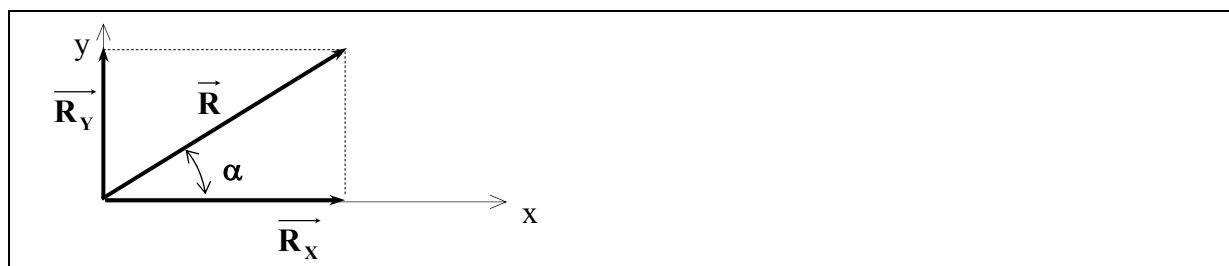
W obydwu przypadkach postępujemy tak, jak przedstawionym na rys.10 dodawaniu wektorów.



Rys. 10. Składanie sił zbieżnych: a). metodą równoległoboku, b) metodą wieloboku

Rozkładanie sił na dwie składowe

Każdą siłę możemy rozłożyć na dwie składowe, np. na dwie osie symetrii. Sposób rozłożenia siły na dwie składowe, leżące na osiach symetrii x i y, przedstawiono na rysunku 11.



Rys. 11. Rozkładanie siły na dwie składowe

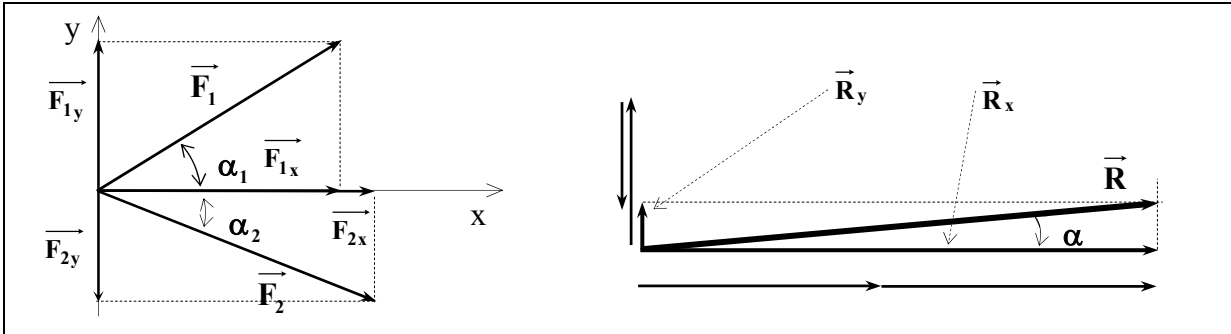
Wartość siły składowej (moduł) możemy określić metodą geometryczną lub analityczną. W metodzie geometrycznej rysujemy siły w odpowiedniej podziałce, rozkładamy je na osie symetrii, mierzymy długość siły składowej i mnożymy przez przyjętą podziałkę.

W metodzie analitycznej, mając podaną wartość siły i kąt α korzystamy ze wzorów:

$R_x = R \cdot \cos \alpha$	$R_y = R \cdot \sin \alpha$	$R^2 = R_x^2 + R_y^2$	$\cos \alpha = \frac{R_y}{R}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------	-------------------------------

Analityczne składanie sił zbieżnych

Mając układ sił zbieżnych możemy obliczyć wartość siły wypadkowej, oraz kąt pod jakim biegnie kierunek tej składowej.



Rys. 12. Rysunek pomocniczy do obliczenia wartości siły składowej

Tok postępowania jest następujący:

1. Rozkładamy siły F_1 i F_2 na składowe F_{1x} , F_{2x} , F_{1y} , F_{2y}
2. Obliczamy sumy rzutów na oś x i oś y korzystając ze wzorów:

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 \quad F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} \quad R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

$$R_x = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2$$

$$R_y = F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2$$

3. Wartość siły R obliczamy z wzoru:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

4. Kąt obliczamy ze wzoru:

$$\cos \alpha = R_x / R$$

Warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił

Jeżeli punkt materialny, czy ciało sztywne są w stanie spoczynku to wszystkie siły zewnętrzne wzajemnie się znoszą (są w równowadze). Zapisać to można następująco:

$$F_1 + F_2 + \dots F_n = 0$$

Jest to warunek równowagi sił.

Jeżeli wszystkie takie siły zredukowalibyśmy za pomocą wieloboku sił, to wielobok byłby zamknięty. Zapisać to można następująco: Płaski zbieżny układ sił jest w równowadze, jeżeli wielobok sił tego punktu jest zamknięty.

Rozkładając na osie wszystkie siły w zbieżnym płaskim układzie sił, warunek równowagi odnosi się również do rzutów tych sił na osie.

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots F_{nx} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots F_{ny} = 0$$

Dla przestrzennego układu sił ponadto:

$$\mathbf{F}_{1z} + \mathbf{F}_{2z} + \dots + \mathbf{F}_{nz} = \mathbf{0}$$

Należy zaznaczyć, że warunek będzie spełniony, jeżeli uwzględnimy wszystkie siły zewnętrzne – siły czynne i reakcje.

4.2.2. Pytania sprawdzające

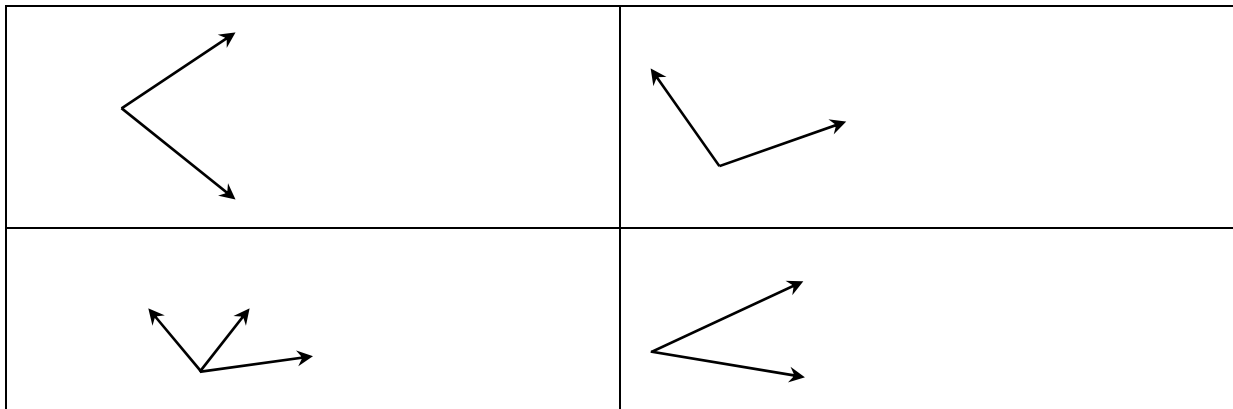
Odpowiadając na pytania, sprawdzisz, czy jesteś przygotowany do wykonania ćwiczeń.

1. Jaki układ sił nazywamy zbieżnym?
2. Jakimi metodami możemy składać siły?
3. Na czym polega składanie sił metodą wieloboku?
4. Na czym polega składanie sił metodą równoległoboku?
5. Na czym polega dodawanie sił metodą analityczną?

4.2.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 1

Wykonaj składanie podanych sił metodą równoległoboku.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

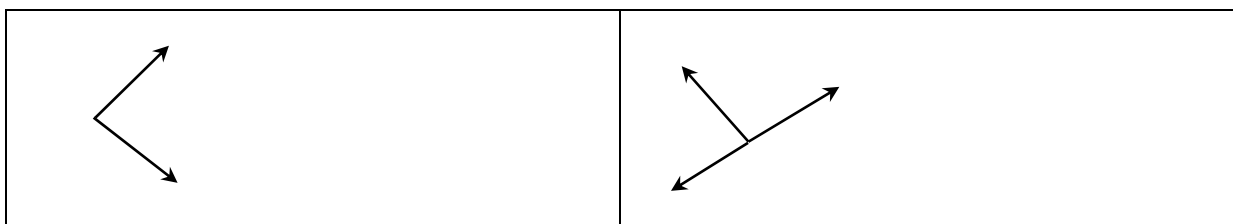
- 1) wykorzystać sposób składania sił metodą równoległoboku,
- 2) złożyć przedstawione siły i oznaczyć ich wypadkową.

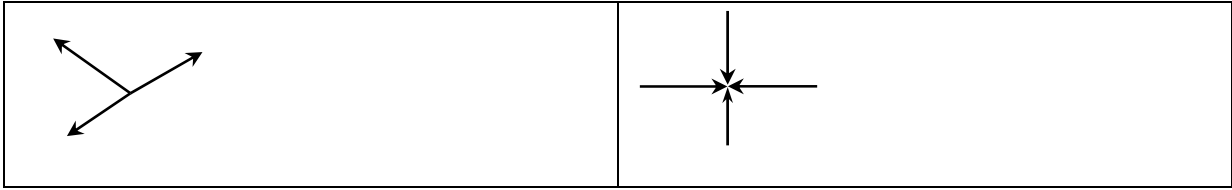
Wyposażenie stanowiska pracy:

Linijka z podziałką, trójkąt, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 2

Wykonaj składanie podanych sił metodą wieloboku.





Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

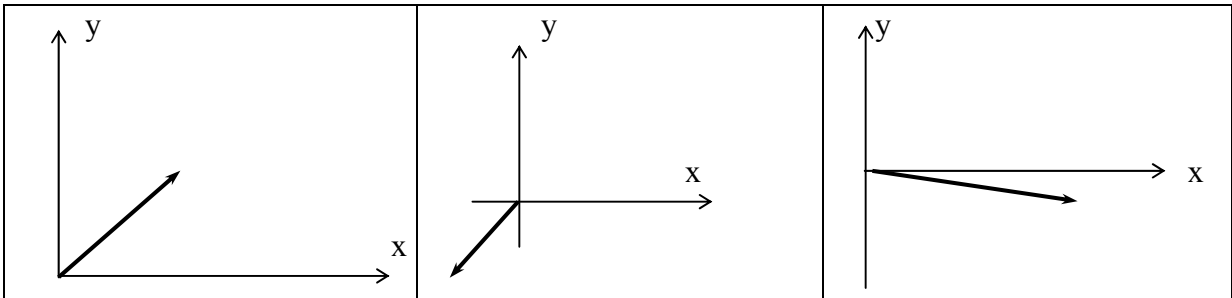
- 1) wykorzystać sposób składania sił metodą wieloboku,
- 2) złożyć przedstawione siły i oznacz ich wypadkową.

Wyposażenie stanowiska pracy:

Linijka z podziałką, trójkąt, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 3

Rozłóż siły na dwie składowe (na oś x i y) metodą geometryczną oraz podaj ich wartości. Przyjmij następujące dane $1 \text{ cm} = 100 \text{ kN}$.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

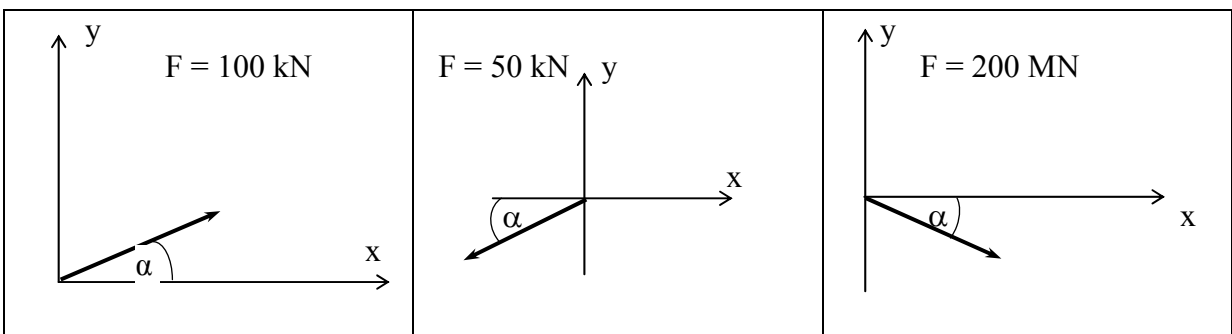
- 1) wykorzystać sposób geometrycznego rozkładania sił na dwie osie,
- 2) rozłożyć siły na osie x i y ,
- 3) podać wartości siły F oraz F_x i F_y .

Wyposażenie stanowiska pracy:

Linijka z podziałką, trójkąt, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 4

Rozłóż siły na dwie składowe (na oś x i y) metodą analityczną oraz oblicz ich wartości. Przyjmij następujące dane: kąt $\alpha = 30^\circ$.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

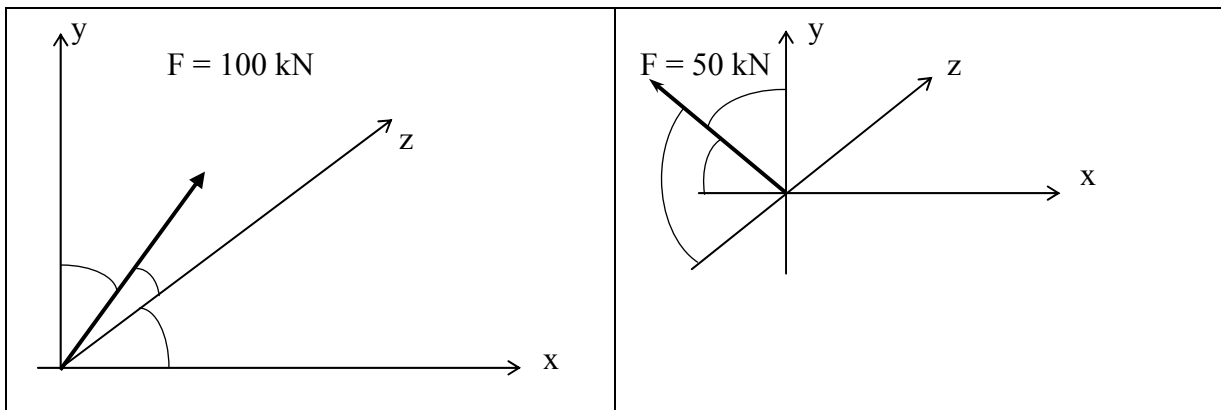
- 1) wykorzystać sposób analitycznego rozkładania sił na dwie osie,
- 2) rozłożyć siły na osie x i y ,
- 3) obliczyć wartości sił oraz F_x i F_y .

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 5

Rozłóż siły na trzy składowe (na oś x , y i z) metodą analityczną oraz oblicz ich wartości. Kąt pomiędzy siłą, a każdą z osi wynosi 60° .



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) wykorzystać sposób analitycznego rozkładania sił na dwie osie,
- 2) rozłożyć siły na osie x , y i z ,
- 3) obliczyć wartości sił oraz F_x , F_y i F_z .

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, linijka, ołówek, literatura uzupełniająca.

4.2.4. Sprawdzian postępów

Czy potrafisz:

- | | Tak | Nie |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) wyznaczyć siłę składową metodą wieloboku? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2) wyznaczyć siłę składową metodą równoległoboku? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3) rozłożyć siły na dwie składowe? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4) obliczyć wartości siły wynikowej dla układu sił zbieżnych? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5) podać warunki równowagi płaskiego i przestrzennego układu sił zbieżnych? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

4.3. Dowolny płaski układ sił

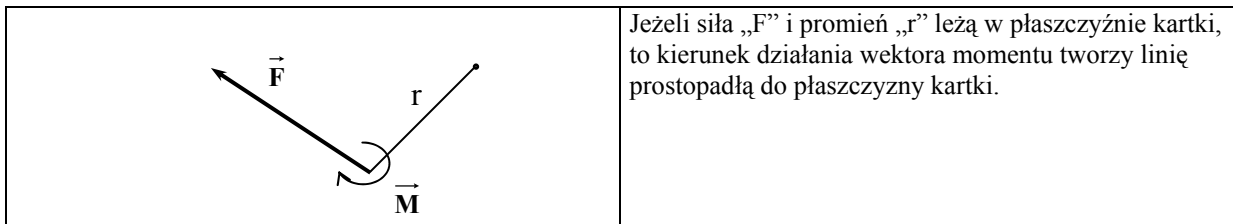
4.3.1. Materiał nauczania

Moment siły względem punktu

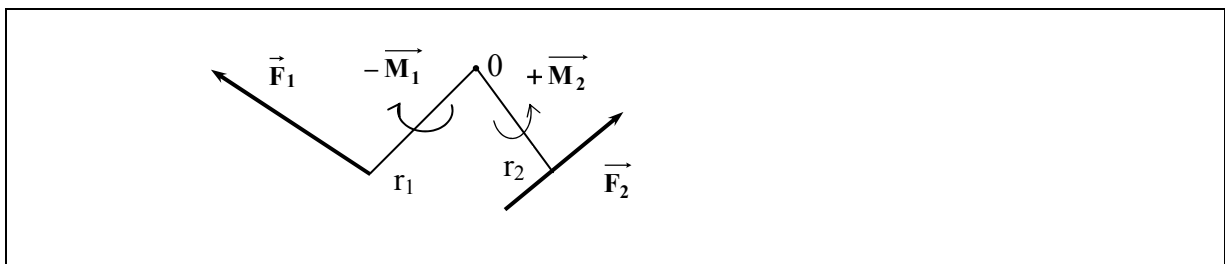
Momentem siły nazywamy wektor, który posiada następujące cechy:

- wartość liczbowa równą iloczynowi siły i jej ramienia działania,
- kierunek prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez linię działania siły i jej ramię,

$$\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$$



- zwrot momentu jest zgodny z regułą gwintu prawozwojnego. Obracająca się pod wpływem siły śruba będzie się przesuwać zgodnie ze zwrotem momentu.



Znak „-” oznacza, że zwrot momentu skierowany jest „pod kartkę”, a znak „+”, że zwrot momentu skierowany jest „nad kartkę”.

Wartości momentów:

$$M_1 = - F_1 \cdot r_1$$

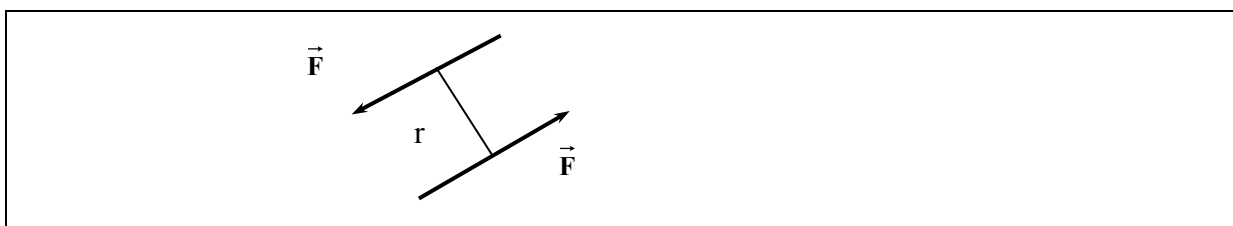
$$M_2 = + F_2 \cdot r_2$$

Moment główny będzie sumą momentów:

$$M_0 = M_2 + (- M_1) = M_2 - M_1 = F_2 \cdot r_2 - F_1 \cdot r_1$$

Para sił

Dla dwóch sił o równych wartościach i jednakowych kierunkach, lecz o przeciwnych znakach o oddalonych od siebie o odległość „r” moment tych sił będzie miał wartość jednej siły pomnożonej przez odległość między nimi ($M = F \cdot r$)



Moment pary sił będzie dodatni, jeżeli para sił dąży do obrócenia układu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a ujemny jeżeli zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Każdą parę sił możemy zastąpić momentem i odwrotnie, każdy moment możemy zastąpić parą sił.

Jeżeli układ z działającymi momentami jest w równowadze to możemy zapisać:

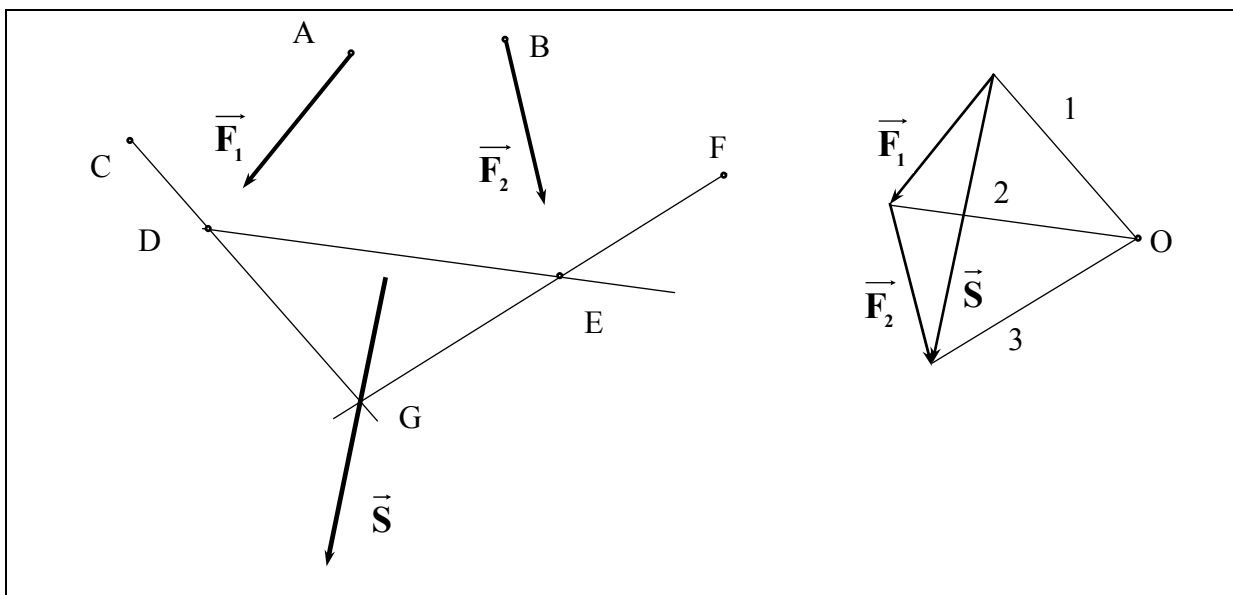
$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \mathbf{0} \text{ – Jest to warunek równowagi momentów.}$$

Składanie dowolnego płaskiego układu sił

W dowolnym układzie sił, podobnie jak w zbieżnym, możemy występujące siły „sprowadzić” do jednej siły zwanej wypadkową. Można to robić metodą wykreślną (metodą wieloboku sznurowego) albo analityczną. Metoda wykreślna jest prostsza i szybsza, wymaga jednak staranności oraz zastosowania podziałki. Podziałkę przyjmujemy dowolnie, przy kreśleniu wektora siły przyjmujemy, że 10 mm będzie się równało sile 10 niutonów (mając podaną wartość siły w niutonach kreślimy wektor o odpowiedniej długości, mając narysowany wektor mierzymy jego długość i przeliczamy na wartość w niutonach).

Metoda wieloboku sznurowego przedstawiona jest na rysunku 13. Kolejność czynności przy składaniu sił metodą wieloboku sznurowego jest następująca:

1. Mamy określoną liczbę sił, które pragniemy sprowadzić do jednej (złożyć siły). W podanym przykładzie przyjmujemy dwie siły: F_1 i F_2 .
2. W dowolnym punkcie na płaszczyźnie kreślimy wielobok sił. Kreślimy pierwszą siłę, na której końcu kreślimy drugą siłę i łączymy je siłą składową „S”.
3. Obieramy dowolny punkt „O” i łączymy z nim promieniami 1, 2, 3 początki i końce sił F_1 i F_2 . Promień 1 musi wychodzić z początku siły F_1 , promień 2 z końca siły F_1 i jednocześnie z początku siły F_2 , itd. Wielobok z promieniami nazywamy „planem sił”.
4. Przenosimy równolegle promień 1 do przecięcia z kierunkiem działania siły F_1 . Otrzymamy punktu C i D.
5. Do punktu D przenosimy równolegle promień 2 do przecięcia się z kierunkiem działania siły F_2 . Otrzymamy punkt E.
6. Do punktu E przenosimy równolegle promień 3, aż do przecięcia się z promieniem 1. Otrzymamy punkty G i F.
7. Przenosimy równolegle siłę składową S do tego punktu G. Jest to punkt, przez który musi przechodzić siła składowa.
8. Przy większej liczbie sił przenosimy kolejno promienie do przecięcia się z kierunkami odpowiadających im sił. Na koniec przenosimy ostatni promień, aż do przecięcia się z promieniem pierwszym.



Rys. 13. Kreślenie wieloboku sznurowego

Warunki równowagi dowolnego układu sił

Istnieją trzy analityczne warunki równowagi dowolnego płaskiego układu sił:

- 1) Suma rzutów wszystkich sił (sił czynnych i reakcji) na oś x musi się równać zero,
- 2) Suma rzutów wszystkich sił na oś y musi się równać zero,
- 3) Suma momentów wszystkich sił (moment główny) względem dowolnego bieguna musi się równać zero.

Warunki te możemy zapisać za pomocą trzech równań:

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{ix} = 0 \quad \text{czyli} \quad \sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0 \qquad \sum M_i = 0$$

W przypadku układu w przestrzeni:

1. Suma rzutów wszystkich sił (sił czynnych i reakcji) na oś x musi się równać zero.

$$\sum F_{ix} = 0$$

2. Suma rzutów wszystkich sił na oś y musi się równać zero,

$$\sum F_{iy} = 0$$

3. Suma rzutów wszystkich sił na oś z musi się równać zero,

$$\sum F_{iz} = 0$$

4. Suma momentów wszystkich sił względem osi x musi się równać zero.

$$\sum M_{ix} = 0$$

5. Suma momentów wszystkich sił względem osi y musi się równać zero.

$$\sum M_{iy} = 0$$

6. Suma momentów wszystkich sił względem osi z musi się równać zero.

$$\sum M_{iz} = 0$$

Powyższe równania równowagi służą do wyznaczania niewiadomych reakcji występujących w punktach podparcia ciała obciążonego siłami czynnymi i będącego w równowadze. Dla płaskiego układu sił możemy wyznaczyć tylko trzy równania. Jeżeli wystąpią trzy niewiadome reakcje, to taki układ nazywamy statycznie wyznaczalnym. Jeżeli więcej, to statycznie niewyznaczalnym.

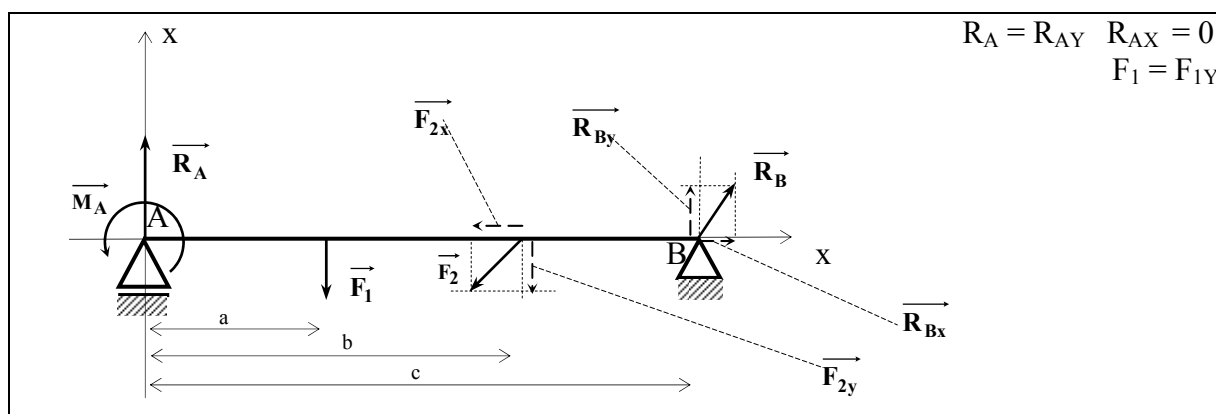
Reakcje belek

Belką nazywamy element konstrukcyjny, który przenosi obciążenia zginające. Na przykład belki stropowe, osie wagonów, wały w maszynach.

Obliczenie belek stosujemy do obliczeń wału przekładni, który jest osadzony w łożyskach. Przy czym jedno łożysko jest łożyskiem, które możemy zastąpić podporą stałą

(łożysko wahliwe, zespół dwóch łożysk stożkowych), a drugie ruchomą (łożysko walcowe). Na wał działają siły pochodzące od kół zębatach, hamulców, sprzęgieł.

Szkic takiego układu przedstawia rysunek 14. Na rysunku przedstawiono dwie siły zewnętrzne F_1 i F_2 oraz oznaczono reakcje w podporach. Reakcja R_A , występująca w podporze ruchomej, jest prostopadła do belki, jej zwrot przyjęto dowolnie. Jeżeli z obliczeń wyjdzie, że wartość reakcji będzie miała znak dodatni, to znaczy że zwrot jest prawidłowy, jeżeli ujemny to znaczy, że zwrot powinien być odwrotny. Reakcja R_B , występująca w podporze stałej jest osadzona w punkcie podparcia. Jej kierunek i zwrot przyjęto dowolnie. Podobnie jak w podporze ruchomej zwrot będzie zależał od znaku przy obliczonej wartości reakcji, natomiast kierunek zostanie obliczony przez podanie kąta nachylenia w stosunku do belki. Na rysunku ponadto rozłożono siłę F_2 na dwie składowe: F_{2x} i F_{2y} a reakcję R_B na dwie składowe: R_{Bx} i R_{By} . Oznaczono też moment względem punktu A.



Rys. 14. Przykład belki obciążonej siłami zewnętrznymi

Reakcje obliczamy z warunków równowagi.

- Suma rzutów na oś „x” musi się równać „0”.
 $\sum F_{ix} = 0 = R_A + F_1 - F_{2x} + F_{2y} + R_{By} + R_{Bx}$, ale ponieważ rzut sił R_A , F_1 , F_{2y} i R_{By} jest równy 0 to:
 $\sum F_{ix} = 0 = R_{Bx} - F_{2x}$
- Suma rzutów na oś „y” musi się równać „0”.
 $\sum F_{iy} = 0 = R_A - F_1 - F_{2y} + R_{By}$
- Suma momentów względem punktu „A” musi się równać „0”.
 $\sum M_{iA} = 0 = -F_1 a - F_{2y} b + R_{By} c$

Mając trzy równania i trzy niewiadome możemy wyliczyć trzy reakcje R_A , R_{Bx} , R_{By} . Następnie z reakcji R_{Bx} , R_{By} możemy wyliczyć wartość reakcji R_B oraz kąt pod jakim biegnie kierunek reakcji R_B .

Tarcie w układach statycznych

Jeżeli dowolne ciało znajduje się na równi pochyłej, to ciężar ciała usiłuje spowodować spadek tego ciała. Jednak przeciwstawia się temu siła tarcia. W zależności od wartości tej siły i kąta nachylenia równi pochyłej ciało pozostanie w spoczynku lub spadnie. W statyce będziemy zajmować się tylko ciałem będącym w spoczynku. Podobnie jest wtedy, gdy pragniemy przesunąć ciało po płaszczyźnie. Występuje wtedy opór, który zależy od ciężaru tego ciała i tarcia występującego między tym ciałem, a powierzchnią, po której pragniemy go przesunąć.

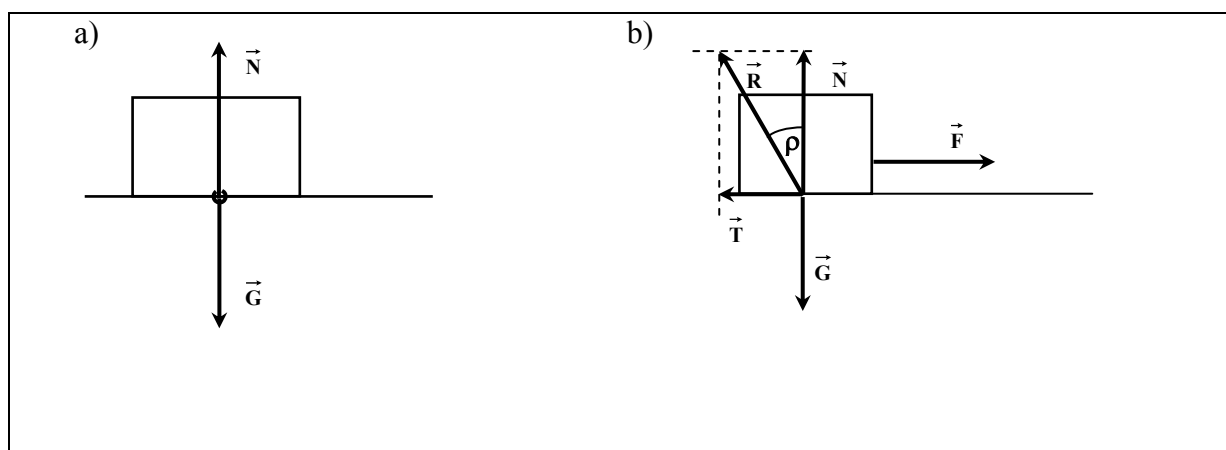
Siła tarcia zależy od współczynnika tarcia (w tym przypadku współczynnika tarcia statycznego w odróżnieniu od współczynnika tarcia kinetycznego, które występuje gdy ciało jest w ruchu) oraz od ciężaru tego ciała (siły nacisku). Wartość tych współczynników zależy

od materiału, z jakiego są wykonane ciała, między którymi występuje tarcie oraz stanu powierzchni styku. Jeżeli pomiędzy ciałami stykającymi się znajduje się smar to współczynnik tarcia jest mniejszy. Przykładowe współczynniki tarcia podano w poniższej tabeli.

Tabela 1. Przykładowe współczynniki tarcia

Materiały	Współczynnik tarcia statycznego [μ]		Współczynnik tarcia kinetycznego [μ_k]	
	Na sucho	Smarowane olejem	Na sucho	Smarowane olejem
Stal po stali	0,22÷0,15	0,1÷0,07	0,1	0,09
Stal po żeliwie lub brązie	0,18	0,1	0,18	0,01
Brąz po żeliwie lub brązie	0,21		0,18	
Żeliwo po żeliwie	0,45	0,25	0,2	0,05
Metal po drewnie	0,5÷0,6	0,1	0,2÷0,5	0,2÷0,08

Na rysunku 15a przedstawione jest ciało leżące na płaszczyźnie. Jego ciężar oznaczony jest literą „G”. Reakcja powierzchni na to ciało jest oznaczona literą „N”. Jeżeli przyłożymy do ciała siłę zewnętrzną F (rysunek 15b), to przeciwstawiać się temu będzie reakcja nazywana siłą tarcia (siła tarcia ślizgowego) oznaczona literą „T”.



Rys. 15. Powstawanie siły tarcia powodowanej naciskiem ciała i siłą czynną F: a) ciężar ciała G wywołuje reakcję N, b) siła F wywołuje siłę tarcia T

Jeżeli będziemy zwiększać siłę F, to w momencie nastąpi chwila, po której ciało zacznie się poruszać. Siłę F możemy nazwać siłą graniczną. Siłę tę równoważy siła tarcia T. Dla tego momentu możemy zapisać:

$$T = F_{gr}$$

Jak widzimy z rysunku 15, występuje reakcja całkowita R, będąca sumą geometryczną sił T i N. Jeżeli kąt pomiędzy nimi oznaczymy ρ (ro) to: $\text{tg } \rho = T/N$.

Dla granicznego przypadku kąt ρ nazywamy kątem tarcia.

Siła tarcia będzie się równać:

$$T = N \cdot \text{tg } \rho$$

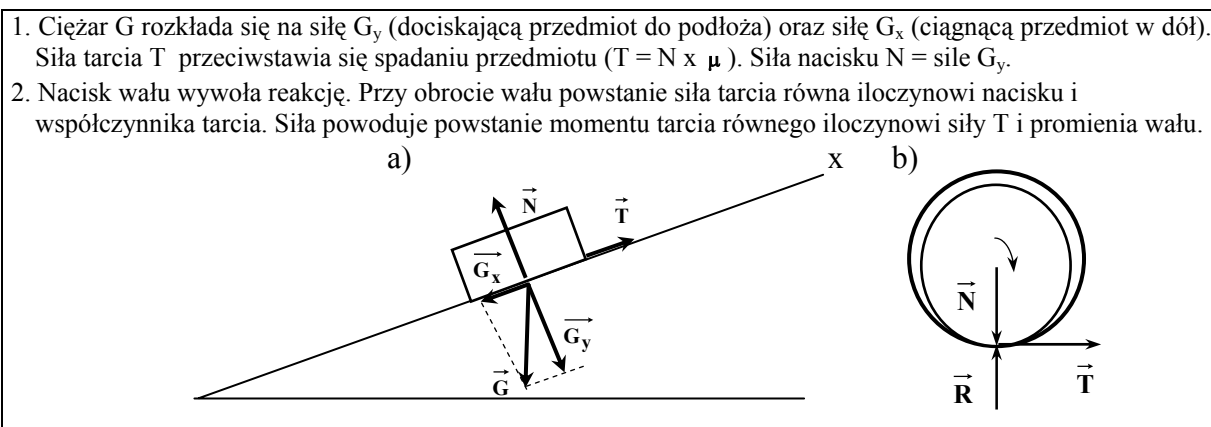
Tangens kąta tarcia nazywamy współczynnikiem tarcia i oznaczamy literą μ .

$$\mu = \text{tg } \rho$$

Jest to współczynnik tarcia statycznego. Jeżeli ciało byłoby w ruchu, to współczynnik tarcia byłby wtedy trochę inny. Byłby to współczynnik tarcia kinetycznego i oznaczany byłby μ_k .

Dla przypadku zsuwania się ciała z równi pochyłej, układ sił byłby taki, jak przedstawiono na rysunku 16a.

Dla przypadku obracania się wału w panewce łożyska układ sił przedstawia rysunek 16b.



Rys. 16. Układ sił występujących na równi pochyłej i w łożysku ślizgowym

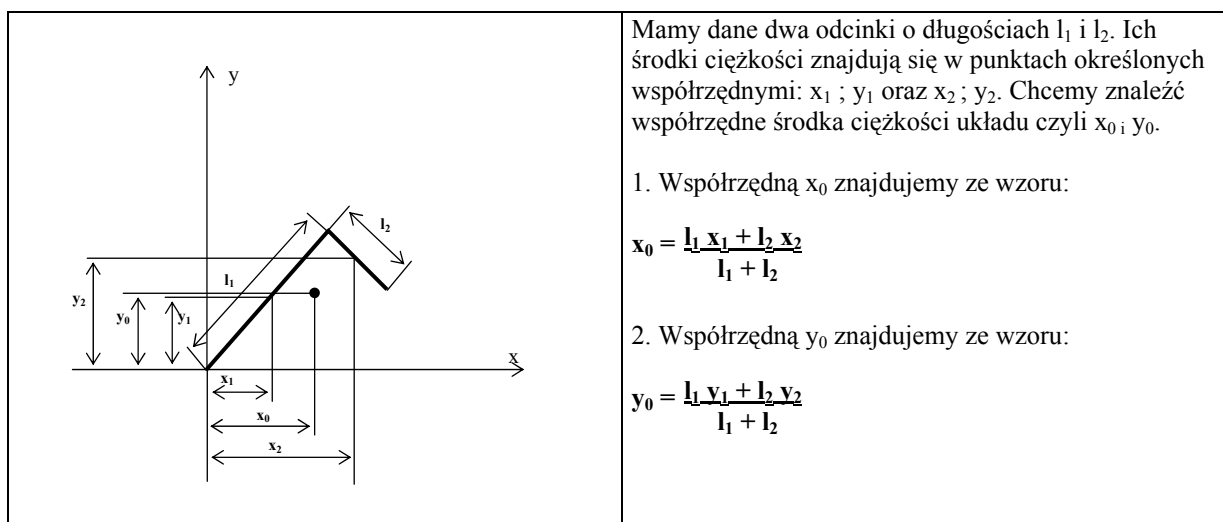
Przy rozwiązywaniu zadań ze statyki, gdy występują siły nacisku i tarcia musimy je uwzględnić w obliczeniach.

Środek ciężkości

Środek ciężkości jest to punkt, w którym jest zaczepiona siła pochodząca od ciężaru ciała. W tej części przedstawione zostanie określanie środków ciężkości linii i płaszczyzn. Jeżeli ciało jest jednorodne to środek ciężkości znajduje się w środku symetrii. Nie stwarza więc problemu określenie środka ciężkości odcinka, koła, prostokąta, czyli figur geometrycznych prostych. Jednak w rzeczywistości części maszyn składają się w szeregu figur połączonych w całość i dla takiego układu należy znaleźć środek ciężkości.

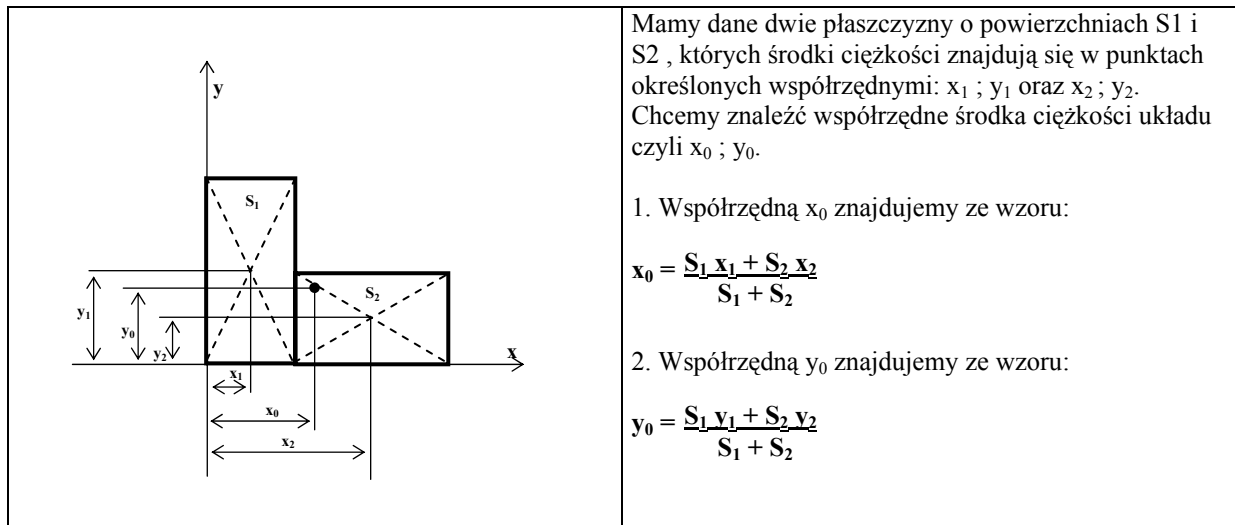
Środek ciężkości układu linii (np. belek)

Sposób znalezienia środka ciężkości dla układu linii przedstawiony jest na rysunku 17.



Rys. 17. Określanie środka ciężkości linii

Sposób znalezienia środka ciężkości dla układu płaszczyzn przedstawiony jest na rysunku 18.



Rys. 18. Określanie środka ciężkości płaszczyzn

4.3.2. Pytania sprawdzające

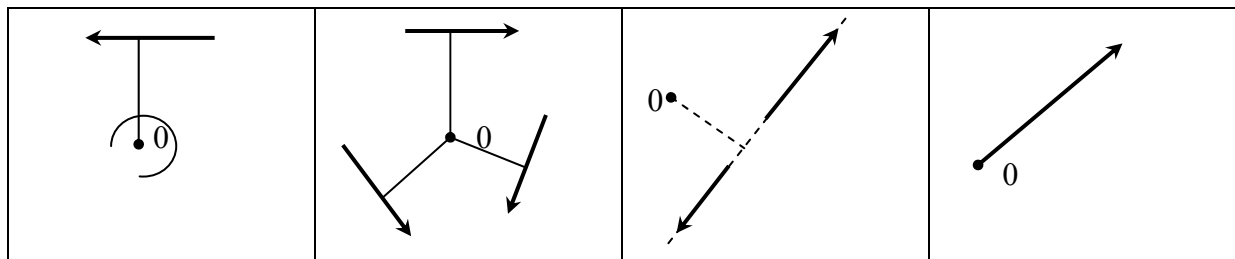
Odpowiadając na pytania, sprawdzisz, czy jesteś przygotowany do wykonania ćwiczeń.

1. Co nazywamy momentem siły względem punktu?
2. Jak obliczamy moment siły względem punktu?
3. Jaki jest warunek równowagi momentów?
4. Jaka jest kolejność czynności przy składaniu sił metodą wieloboku sznurowego?
5. Jakie są warunki równowagi dowolnego płaskiego układu sił?
6. Jakie są warunki równowagi dowolnego przestrzennego układu sił?
7. Jak obliczamy reakcje belek?
8. Jak określamy środek ciężkości układu linii?
9. Jak określamy środek ciężkości układu płaszczyzn?

4.3.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 1

Określ zwrot i znak (+ lub -) momentu względem punktu „0”.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

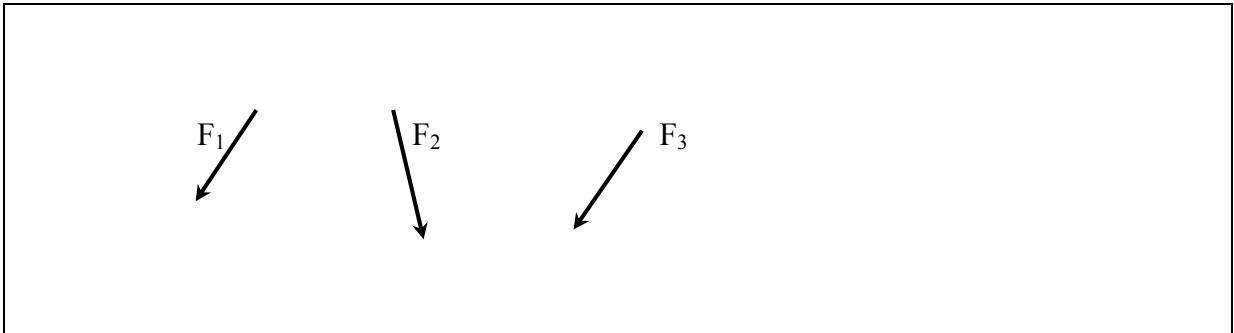
- 1) przypomnieć sobie zasadę śruby prawozwójnej,

- 2) nanieść strzałkę oznaczającą zwrot momentu siły,
- 3) określić znak momentu (+ lub -).

Wyposażenie stanowiska pracy:
Linijka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 2

Złóż siły metodą wieloboku sznurowego.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

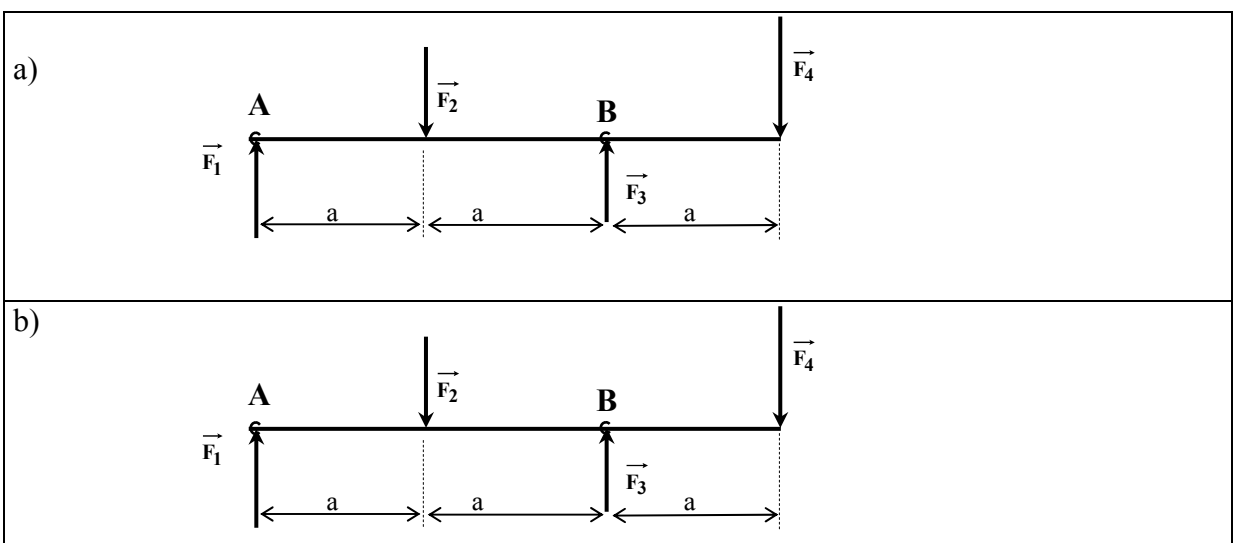
- 1) złożyć siły metodą wieloboku (obok), oznacz punkt obok wieloboku, nanieś promienie łączące końce i początki sił z zaznaczonym punktem,
- 2) przenieść równolegle promień 1, aż do przecięcia z linią kierunku siły F_1 . Przenieś równolegle pozostałe promienie znajdując kolejne punkty wieloboku sznurowego,
- 3) znaleźć punkt, przez który musi przechodzić siła składowa. Przenieś z wieloboku siłę składową do znalezionej punktu.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Linijka z podziałką, trójkąt, ołówek, zamieszczona w poradniku literatura.

Ćwiczenie 3

Oblicz wartości momentów głównych względem punktów A i B.

Dane: $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 20 \text{ kN}$, $F_3 = 5 \text{ kN}$, $F_4 = 10 \text{ kN}$, $a = 1 \text{ metr}$.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

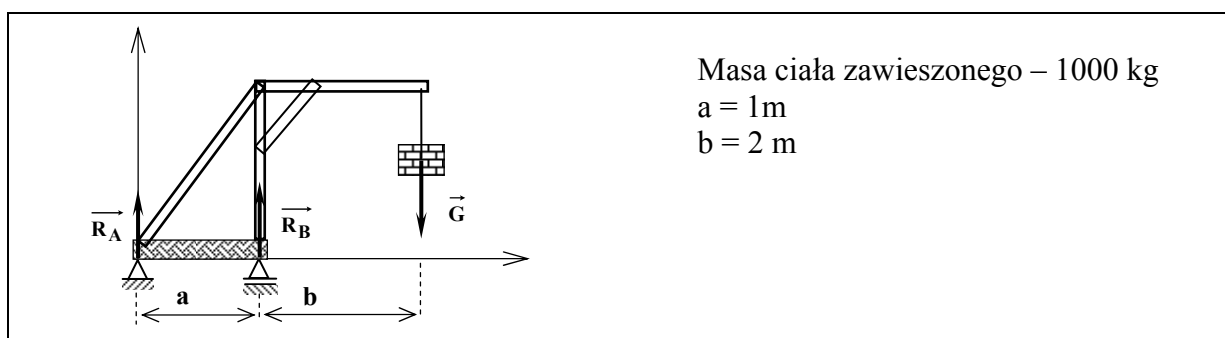
- 1) przy obliczaniu momentu głównego względem punktu A skorzystać z górnego rysunku, a względem punktu B z dolnego,
- 2) nanieść na rysunek symbole, zwroty i znaki momentów względem punktu „A” występujących sił,
- 3) obliczyć moment główny względem punktu „A”,
- 4) to samo wykonać obliczając moment względem punktu B.

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, linijka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 4

Oblicz analitycznie reakcje w punktach A i B.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) wpisać warunek równowagi dotyczący sumy rzutów wszystkich sił na oś y,
- 2) wpisać warunek równowagi dotyczący sumy momentów względem początku układu współrzędnych,
- 3) wstawić dane i obliczyć wartości reakcji

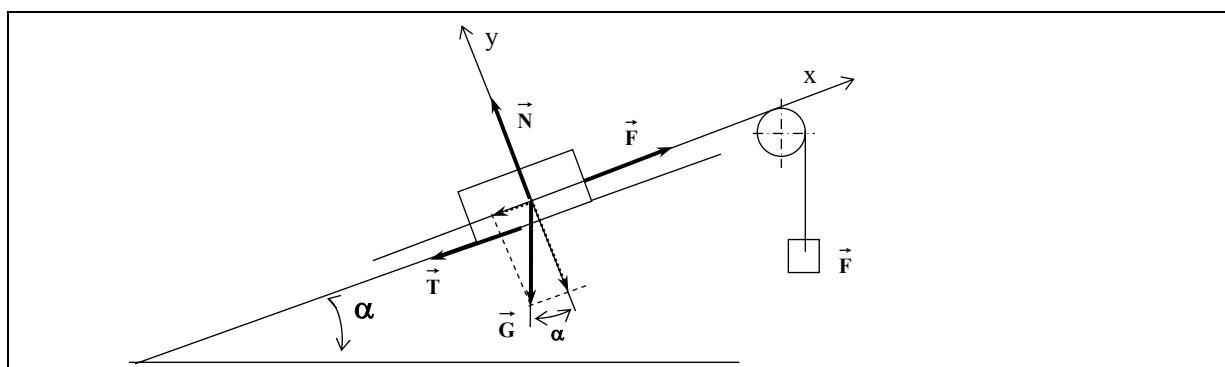
Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 5

Oblicz największą siłę F, przy której ciężar leży na równi pozostanie jeszcze nieruchomy.

Dane: $G = 1000\text{ kN}$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 30^\circ$.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

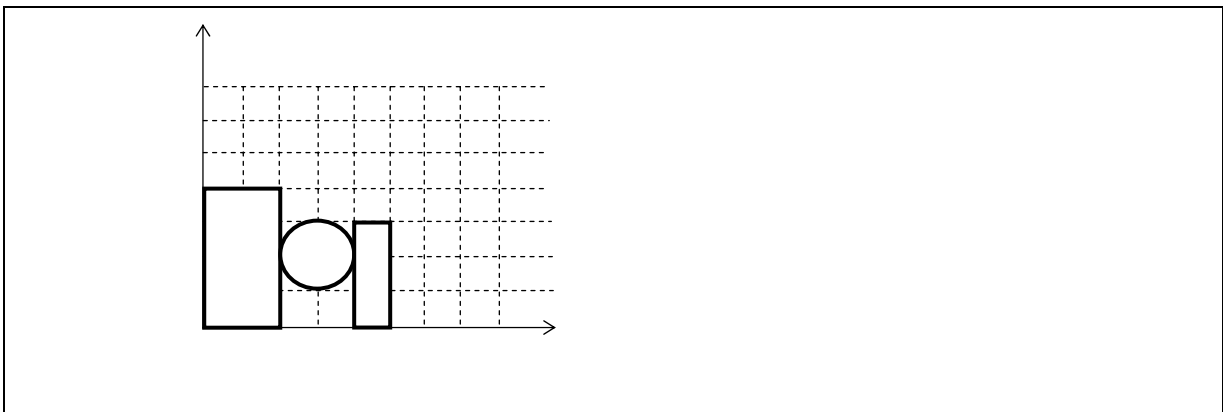
- 1) rozłożyć siłę G na składowe: G_x i G_y . Napisz równania na ich wartości, zależne od kąta α i siły G ,
- 2) napisać wzór na siłę T ,
- 3) napisać warunek równowagi dotyczący sumy rzutów na oś „ x ”. Zmodyfikować równanie, aby po jednej jego stronie występowała siła F ,
- 4) podstawić dane. Obliczyć siłę F .

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 6

Wyznacz środek ciężkości płaszczyzn. Dane: 1 kratka odpowiada 10 mm.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) wyznaczyć położenie środków ciężkości figur. Podaj współrzędne środków ciężkości,
- 2) obliczyć ich powierzchnie,
- 3) obliczyć położenie środka ciężkości całej figury (x_0 i y_0).

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, linijka, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

4.3.4. Sprawdzian postępów

Czy potrafisz:

- | | Tak | Nie |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) obliczyć moment siły względem dowolnego punktu? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2) złożyć siły dowolnego układu metodą wieloboku sznurowego? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3) wyznaczyć warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4) wyznaczyć warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5) obliczyć reakcje w belce? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6) obliczyć siłę tarcia? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7) wyznaczyć środek ciężkości układu linii i płaszczyzn? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

4.4. Kinematyka punktu materialnego i ciała sztywnego

4.4.1. Materiał nauczania

Kinematyka punktu materialnego

Kinematyka jest nauką o ruchu. Ruch jest pojęciem względnym i zależy od układu odniesienia. Osoba siedząca w jadącym pociągu porusza się względem otoczenia, natomiast względem pociągu nie porusza się. Są to więc inne układy odniesienia. Układ odniesienia, który pozostaje względnie nieruchomy, nazywamy układem bezwzględnym. Inne układy nazywamy względnymi. Ziemia jest w tym przypadku układem bezwzględnym, a pociąg układem względnym. Natomiast ruch rozpatrywany w układzie bezwzględnym nazywamy ruchem bezwzględnym, a ruch rozpatrywany w układzie względnym nazywamy ruchem względnym.

W każdym układzie odniesienia punkt może się różnie poruszać. Mogą wystąpić następujące rodzaje ruchu:

- ruch prostoliniowy jednostajny – punkt porusza się z jednakową prędkością po linii prostej,
- ruch prostoliniowy zmienny – punkt porusza się z różną prędkością po linii prostej,
- ruch krzywoliniowy jednostajny – punkt porusza się z jednakową prędkością po linii nie będącej prostą,
- ruch krzywoliniowy zmienny – punkt porusza się z różną prędkością po linii nie będącej prostą.

Ruch prostoliniowy jednostajny:

Ruch ten opisują następujące wielkości:

Prędkość: $v = S/t$ – jest to stosunek drogi do czasu.

Droga: $S = v t$ – jest to iloczyn drogi i czasu.

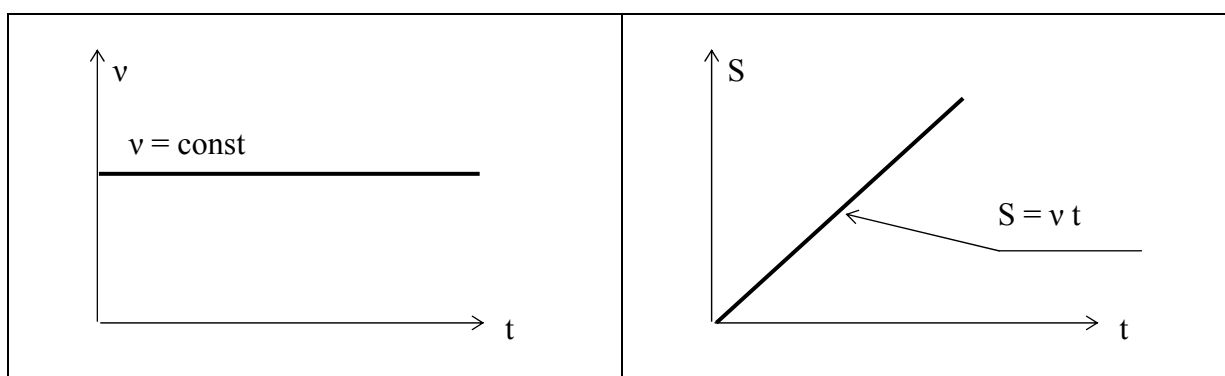
W układzie SI jednostki są następujące:

Droga – [m] metr

Czas – [s] sekunda

Prędkość [m/s] metry na sekundę.

Drogę i czas możemy przedstawić w układzie współrzędnych:



Rys. 19. Wykresy prędkości i drogi

Ruch prostoliniowy zmienny

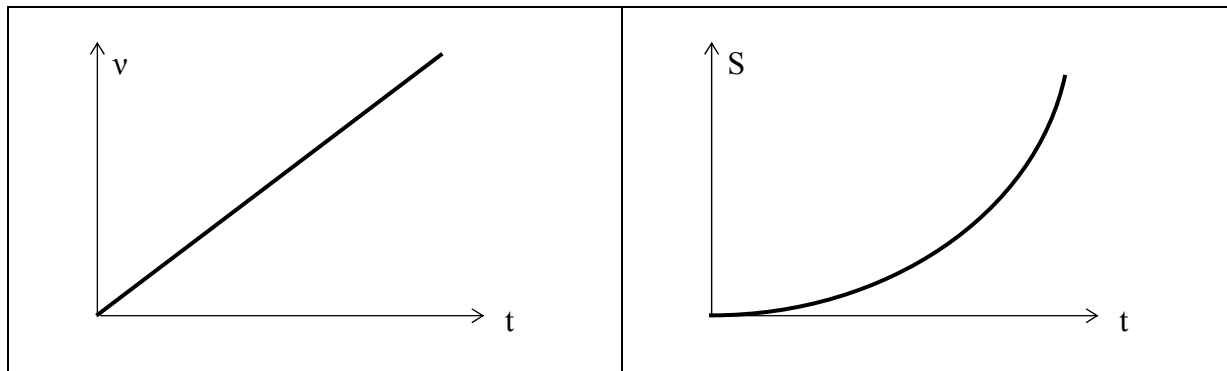
Przy założeniu, że w chwili początkowej punkt nie porusza się, ruch ten opisują następujące wielkości:

Prędkość: $v = a \cdot t$

Droga: $S = a \cdot t^2 / 2$

gdzie a [$\frac{m}{s^2}$] – przyspieszenie

Drogę i czas możemy przedstawić w układzie współrzędnych:

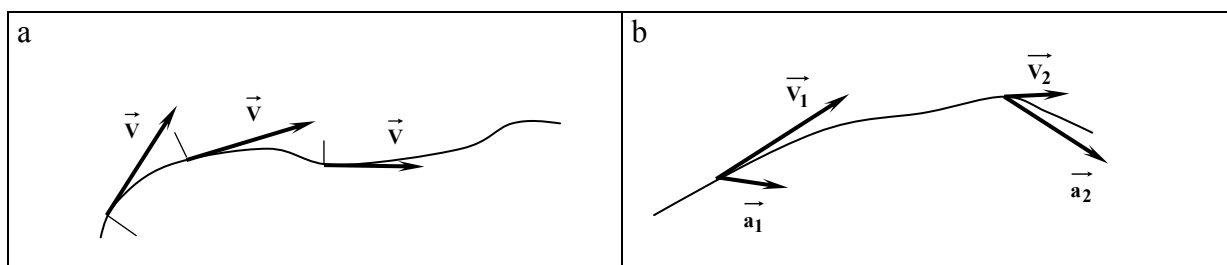


Rys. 20. Wykresy prędkości i drogi

Ruch krzywoliniowy

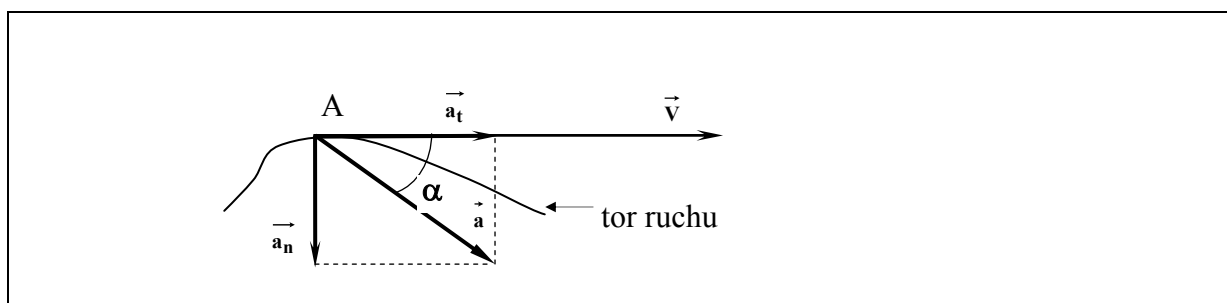
Ruch krzywoliniowy występuje wtedy, gdy punkt porusza się po torze nie będącym linią prostą. Ruch krzywoliniowy jednostajny możemy przedstawić na rysunku 21a. Droga w takim ruchu mierzona jest po linii krzywej. Prędkość obliczamy tak jak dla ruchu prostoliniowego jednostajnego, lecz zwrot i kierunek będzie się ciągle zmieniał. Możemy, więc je określić tylko w danym momencie. Będą to prędkości chwilowe.

W ruchu krzywoliniowym zmiennym zmiennie pozostają: wartość, kierunek i zwrot prędkości oraz wartość, kierunek i zwrot przyspieszenia.



Rys. 21. Graficzne przedstawienie ruchu krzywoliniowego: a) jednostajnego, b) zmiennego

Przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym możemy rozłożyć na dwie składowe: przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne. Przyspieszenie styczne oznaczamy a_t , a przyspieszenie normalne a_n . Graficzne przedstawienie tych przyspieszeń podaje rysunek 22.



Rys. 22. Graficzne przedstawienie przyspieszenia normalnego i stycznego.

Wektor przyspieszenia stycznego pokrywa się z wektorem prędkości, a wektor przyspieszenia normalnego jest prostopadły wektora prędkości. Wzory do obliczeń są następujące:

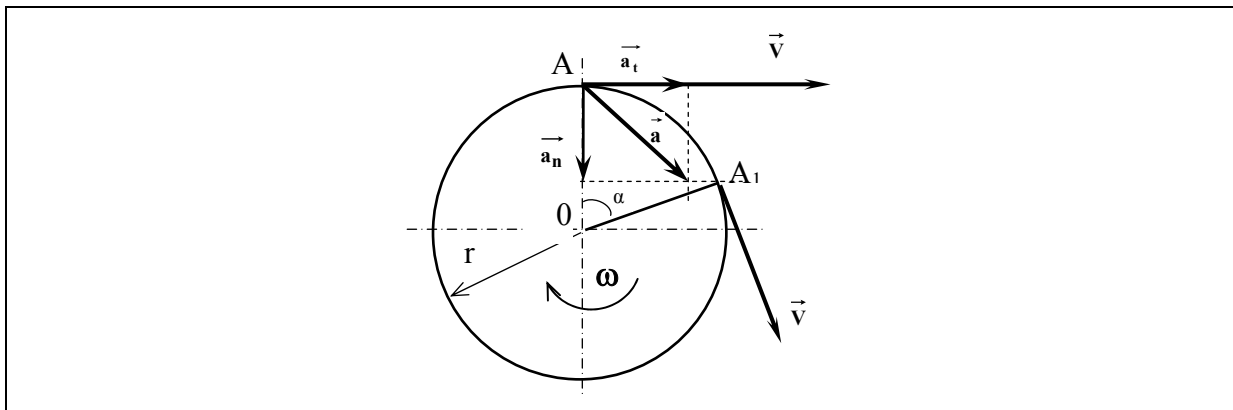
$$a_t = a \cos\alpha; \quad a_n = a \sin\alpha$$

Ruch jednostajny po okręgu

Jest to jeden z przypadków ruchu krzywoliniowego, gdzie torem ruchu jest okrąg. Prędkość „V” punktu po okręgu jest taka sama jak w ruchu prostoliniowym tylko tor ruchu nie tworzy linii prostej, lecz okrąg. Prędkość tę nazywamy prędkością liniową.

W ruchu po okręgu wygodniej jest posługiwać się tak zwaną prędkością kątową – oznaczaną symbolem „ ω ”. Prędkością kątową nazywamy stosunek kąta wyrażonego w radianach do czasu.

Przyspieszenia określamy tak jak w ruchu krzywoliniowym. Punkt będzie miał przyspieszenie normalne oraz styczne. Przy ruchu jednostajnym przyspieszenie styczne będzie równe „0”, więc nie jest ono oznaczone.



Rys. 23. Prędkość i przyspieszenie normalne w ruchu po okręgu

Prędkość kątową wyraża wzór:

$$\omega = \alpha / t \text{ [rad / s] (radian na sekundę)}$$

Zależność prędkości liniowej od kątowej jest następująca:

$$V = r \cdot \omega$$

Przyspieszenie normalne w ruchu po okręgu określone jest wzorem:

$$a_n = r \cdot \omega^2 \quad \text{lub} \quad a_n = V^2 / r$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

W technice bardzo często prędkość obrotową podajemy w obrotach na minutę. Wiedząc, że kąt 360° odpowiada 2π radianów oraz że minuta ma 60 sekund, możemy podać zależność prędkości kątowej i liniowej od prędkości obrotowej:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ [rad / s]} \quad V = \frac{\pi d n}{60}$$

Jeżeli mamy do czynienia z ruchem obrotowym zmiennym to wystąpi jeszcze przyspieszenie styczne, obliczane tak jak dla ruchu krzywoliniowego zmiennego. Ponadto

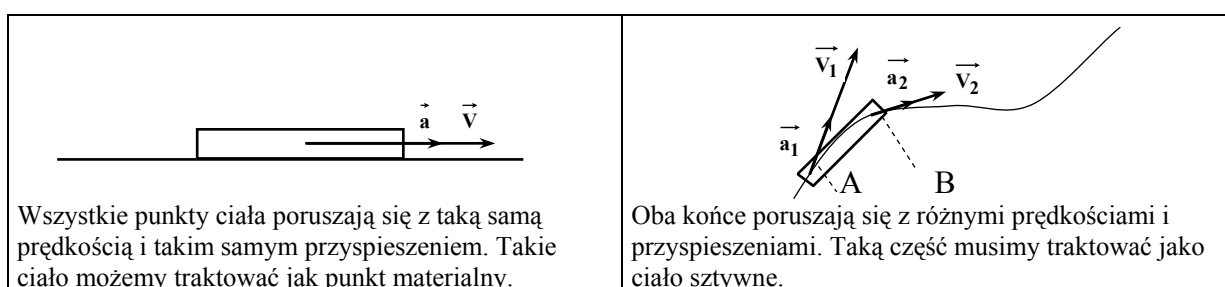
w ruchu zmiennym po okręgu wygodnie jest posługiwać się pojęciem przyspieszenia kąowego „ ϵ ”. Zależności dla ruchu zmiennego po okręgu są następujące:

$$a_t = r \epsilon \quad \omega = \epsilon t \quad \alpha = \epsilon t^2 / 2$$

gdzie α – droga wyrażona kątem obrotu.

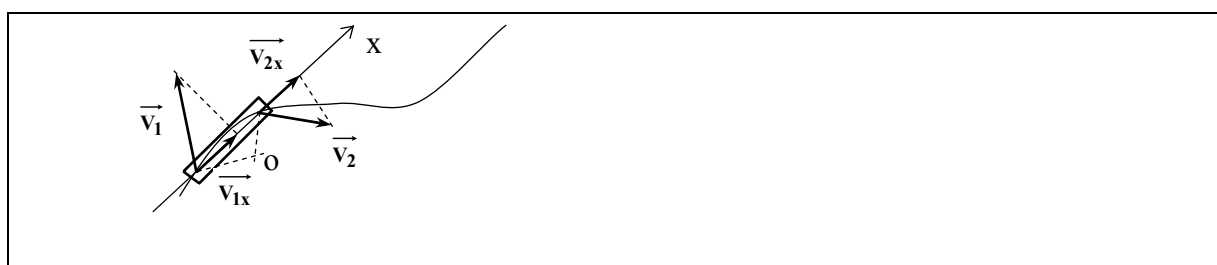
Kinematyka ciała sztywnego

Niektórych mechanizmów nie możemy w rozważaniach sprowadzić do punktu (punktu materialnego). Na przykład poruszająca się część maszyny wykonuje ruch względem jej korpusu. Jeżeli wszystkie punkty tej części posiadają taką samą prędkość i przyspieszenie, to układ możemy sprowadzić do punktu materialnego. Jeżeli jednak początek i koniec części mają różne prędkości i przyspieszenia, to taką część musimy potraktować jako ciało sztywne (składające się z wielu punktów). Różnice te pokazuje rysunek 24.



Rys. 24. Różnice w kinematyce punktu materialnego i ciała sztywnego

Dla ciała sztywnego możemy podać następujące twierdzenia ułatwiające rozważanie układów kinematycznych.



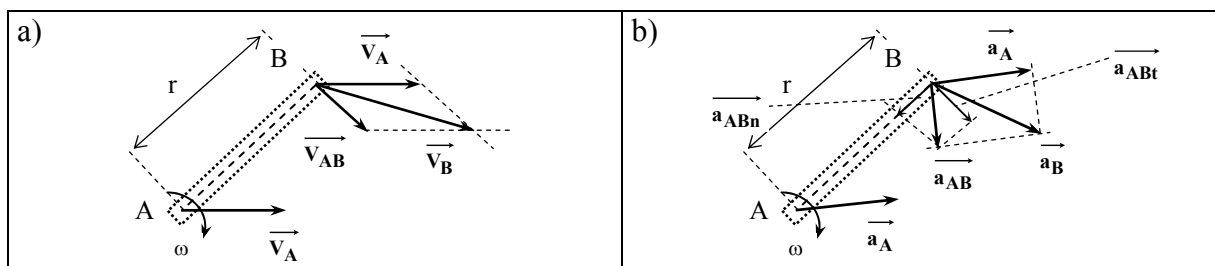
Rys. 25. Rysunek pomocniczy do twierdzeń o sztywności ciała i chwilowym środku obrotu

- 1) Rzuty prędkości dowolnych punktów ciała sztywnego na prostą łączącą te punkty i muszą być równe. Jest to warunek sztywności.
- 2) Jeżeli w danej chwili poprowadzimy proste prostopadłe do wektorów prędkości, to przetną się one w chwilowym środku obrotu.

Ruch płaski ciała sztywnego

Wiele mechanizmów maszyn porusza się ruchem płaskim. Ruch płaski jest wtedy, gdy możemy wyznaczyć jakiś dowolny przekrój ciała sztywnego, który porusza się będzie po jednej płaszczyźnie, a wszystkie inne punkty tego ciała poruszać się będą po płaszczyznach równoległych.

Jeżeli będziemy rozważać poruszające się ciało sztywne i obierzemy jeden z jego punktów za biegun, to prędkość drugiego punktu składać się będzie ze złożenia prędkości bieguna i ruchu obrotowego wokół bieguna. Pokazuje to rysunek 26a.



Rys. 26. Prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu ciała sztywnego: a) prędkość, b) przyspieszenie

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{AB}$$

Prędkość punktu B będzie się składać z prędkości punktu A i prędkości punktu B względem punktu A.

Podobnie jest z przyspieszeniem. Przyspieszenie punktu B będzie się składać z przyspieszenia punktu A oraz przyspieszenia punktu B względem punktu A (rys. 26b).

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{AB}$$

Przyspieszenie \mathbf{a}_{AB} składa się z przyspieszenia stycznego \mathbf{a}_{ABt} oraz przyspieszenia normalnego \mathbf{a}_{ABn} . Czyli:

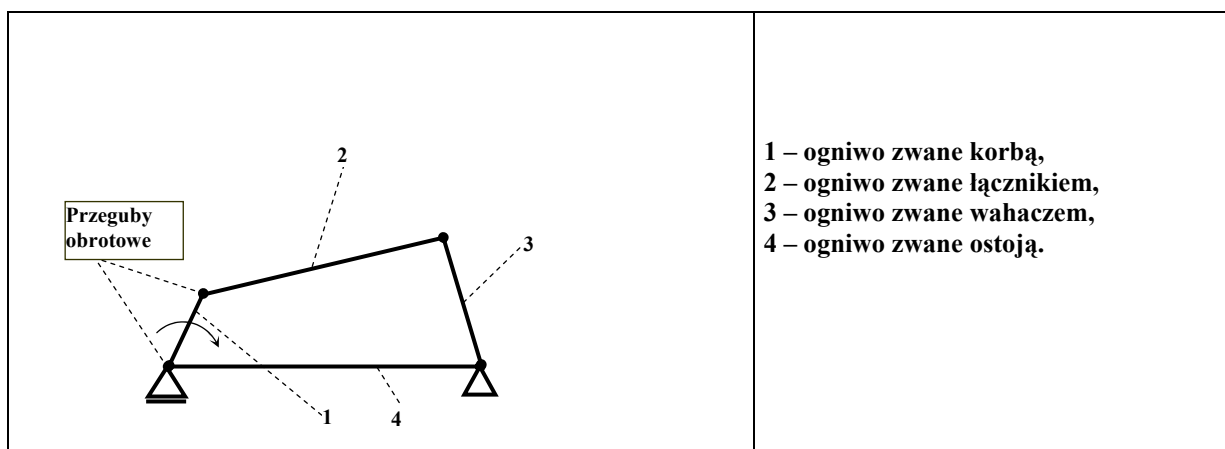
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{ABt} + \mathbf{a}_{ABn}$$

Przy obliczeniach musimy pamiętać, że prędkości i przyspieszenia są wektorami.

Mechanizmy

W mechanice spotykamy wiele różnych mechanizmów takich jak: mechanizmy dźwigniowe, mechanizmy śrubowe, mechanizmy krzywkowe, przekładnie.

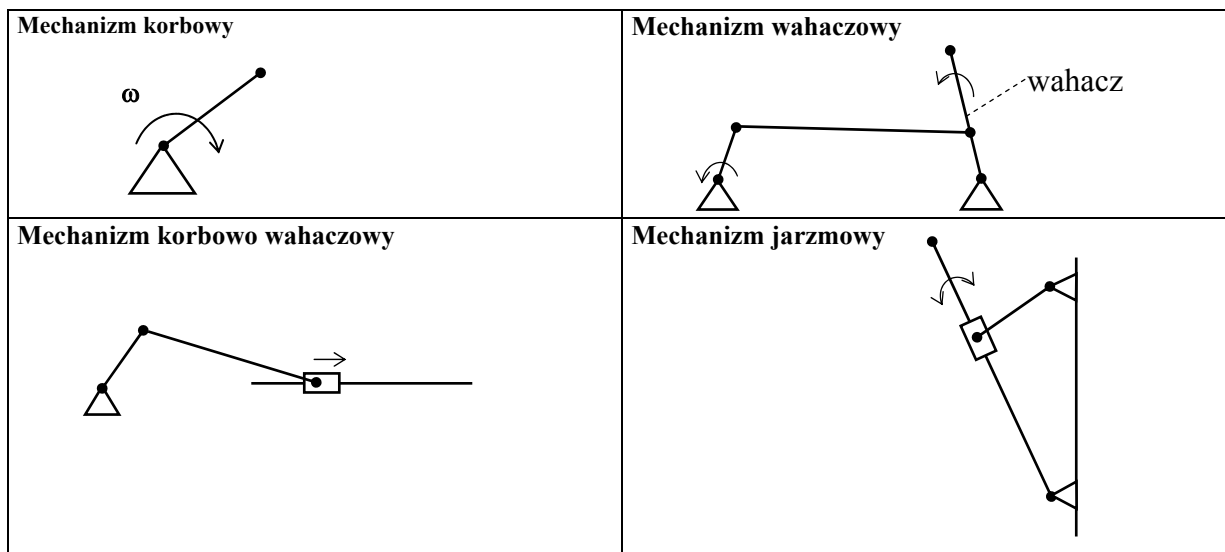
Przykład mechanizmu dźwigniowego pokazuje rysunek 27.



- 1 – ogniwo zwane korbą,
- 2 – ogniwo zwane łącznikiem,
- 3 – ogniwo zwane wahaczem,
- 4 – ogniwo zwane ostoją.

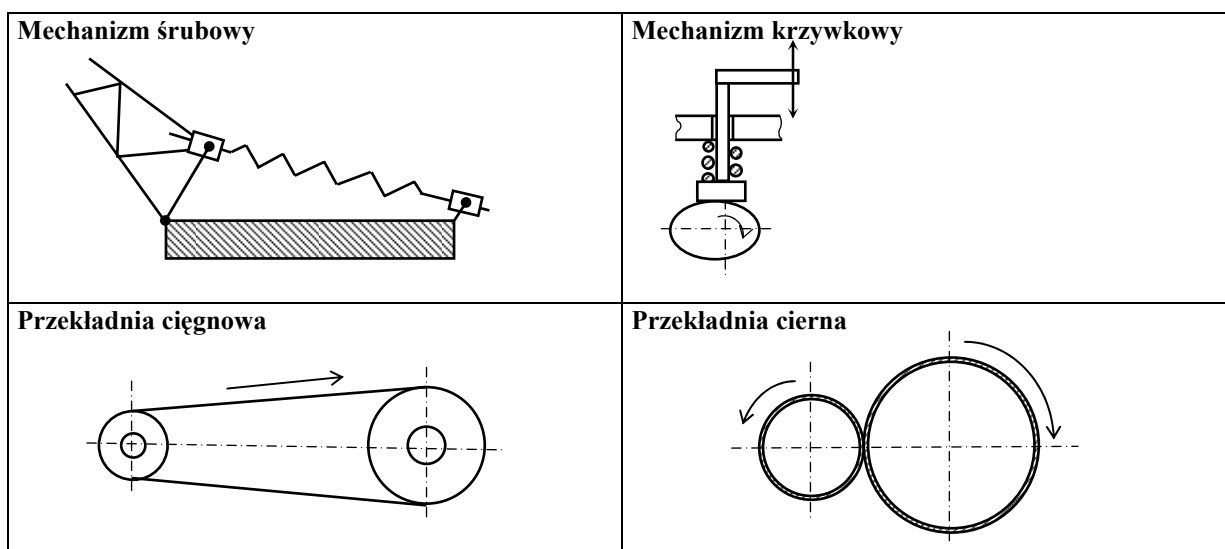
Rys. 27. Mechanizm dźwigniowy

Transformacja tego mechanizmu tworzy szereg odmian, takich jak, mechanizm korbowy, mechanizm korbowo-wodzikowy, mechanizm wahaczowy, mechanizm jarzmowy. Szkice tych mechanizmów przedstawia rysunek 28.



Rys. 28. Wybrane odmiany mechanizmu dźwigniowego

Przykłady mechanizmów śrubowego, krzywkowego oraz przekładniowych (ciągnowej i ciernej) przedstawia rysunek 29.



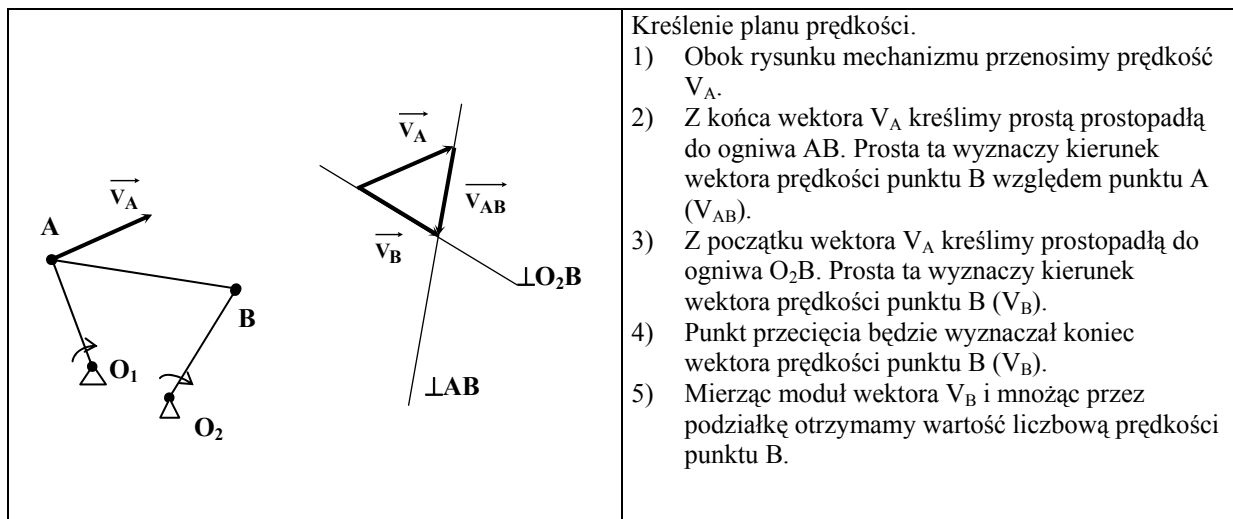
Rys. 29. Przykłady mechanizmów

Plany prędkości i przyspieszeń

W różnego rodzaju mechanizmach istotne jest obliczenie prędkości i przyspieszeń różnych punktów znajdujących się na członach. Można tego dokonać metodą wykreślną i analityczną. Metoda wykreślna jest mniej dokładna, lecz szybsza. Do analizy mechanizmów uzyskiwana w metodzie wykreślny dokładność jest często wystarczająca, więc zostanie ona przedstawiona.

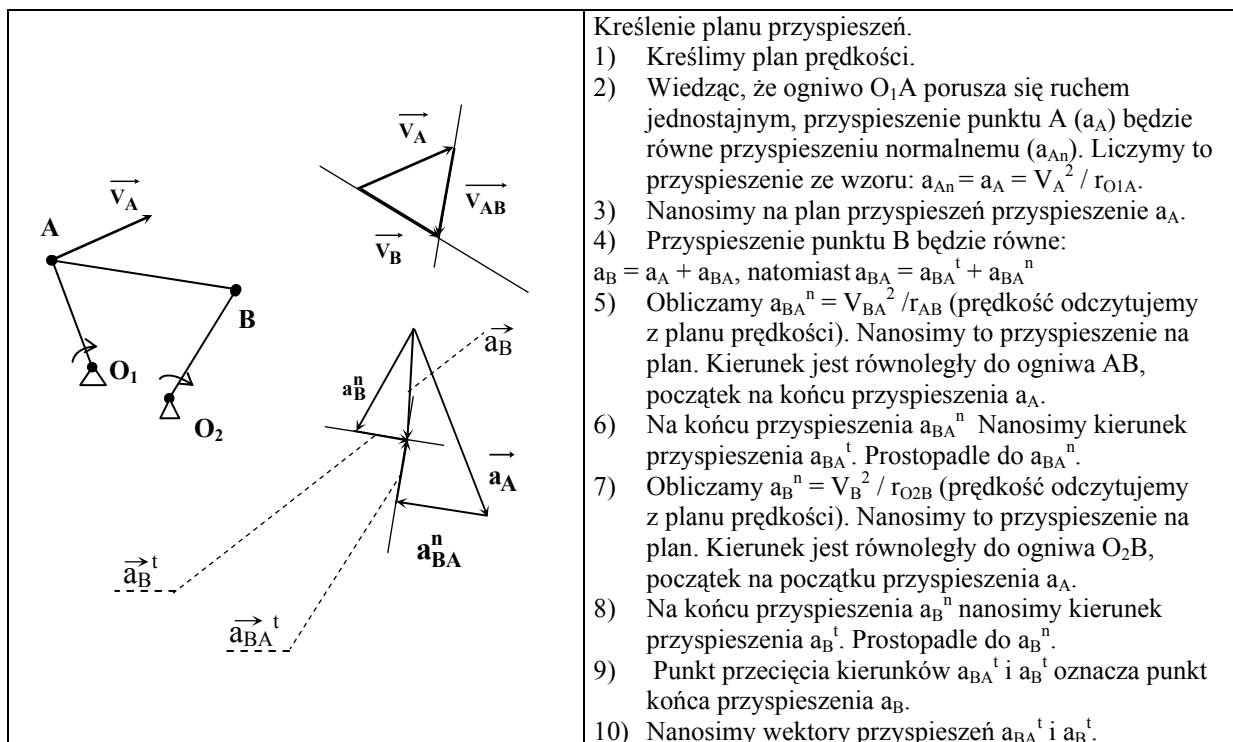
Chcąc wyznaczyć prędkość wybranego punktu na członie mechanizmu musimy przyjąć określoną podziałkę. To znaczy wartość liczbową prędkości odpowiadać będzie odpowiedniej długości wektora.

Na rysunku 30 przedstawiono schemat mechanizmu. Dana jest również prędkość punktu „A” wykreślona w odpowiedniej podziałce. Chcemy metodą planu prędkości znaleźć prędkość punktu B. Czynności konieczne do znalezienia prędkości punktu B przedstawiono na rysunku 30.



Rys. 30. Plan prędkości

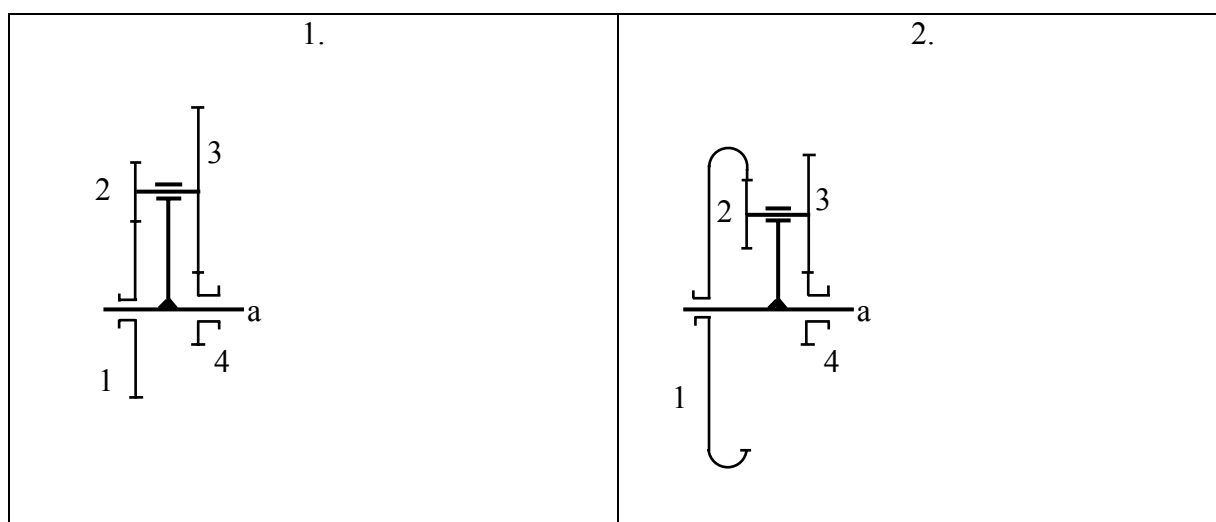
Wyznaczanie przyspieszeń dowolnego punktu mechanizmu przedstawiono na rysunku 31. Na rysunku podany jest schemat mechanizmu oraz następujące dane: $V_A = \text{const.}$ (korba porusza się ruchem jednostajnym po okręgu). Mamy również dane długości ogniwa (r).



Rys. 31. Plan przyspieszeń.

Przekładnie obiegowe

Przekładnią obiegową nazywamy taką przekładnię zębatą, w której co najmniej jedno koło, zwane kołem obiegowym lub satelitą, nie ma stałej osi obrotu, lecz jest ułożyskowane na czopie osadzonym w obracającej się części zwanej jarzmem lub ramieniem. Przykłady takich przekładni przedstawia rysunek 32. Przekładnia „1” jest przekładnią redukującą (zmniejsza obroty), natomiast przekładnia „2” jest przekładnią multiplikującą (zwiększającą obroty).



Rys. 32. Przykłady przekładni obiegowych

W przekładniach obiegowych liczymy obroty poszczególnych kół zębatach. Wykonuje się to za pomocą metody tablicowej (metoda Swampa). Danymi do obliczeń są ilości zębów poszczególnych kół oraz obroty ramienia n_a . Budowa tablicy polega na kolejnym wypełnianiu odpowiednich rubryk. Najpierw blokujemy cały układ i wtedy ramię i wszystkie koła wykonują obroty „ $+n_a$ ” (wiersz: „całość” w tabeli). Następnie wypełnia wiersz 2 tabeli, nadając ramieniu obroty „ a ” kołu „1” obroty „ $-n_a$ ”. Z sumowania kolejnych kolumn tabeli otrzymujemy wyniki.

Tabela 2. Tabela do obliczeń kinematycznych przekładni obiegowej z rysunku 32.

Dla układu „1” przekładni				
Ruchy składowe	Ramię „a”	Koło 1	Koła 2; 3	Koło 4
Całość	$+n_a$	$+n_a$	$+n_a$	$+n_a$
Ramię „a”	0			
Koło 1	$-n_a$	0	$+n_a \frac{z_1}{z_2}$	$-n_a \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4}$
Wynik	$+n_a$	0	$Z_{2,3} = n_a \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)$	$Z_4 = n_a \left(1 - \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right)$
Dla układu „2” przekładni				
Ruchy składowe	Ramię „a”	Koło 1	Koła 2; 3	Koło 4
Całość	$+n_a$	$+n_a$	$+n_a$	$+n_a$
Ramię „a”	0			
Koło 1	$-n_a$	0	$-n_a \frac{z_1}{z_2}$	$+n_a \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4}$
Wynik	$+n_a$	0	$Z_{2,3} = n_a \left(1 - \frac{z_1}{z_2} \right)$	$Z_4 = n_a \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \right)$

Posługując się odpowiednimi tabelami (podanymi w literaturze lub poradnikach) możemy liczyć obroty poszczególnych kół zębatach. Jeżeli potrzebne nam będą prędkości jakichkolwiek punktów kół lub ramienia, to wielkości te obliczymy mając dane wymiary kół oraz ich obroty.

4.4.2. Pytania sprawdzające

Odpowiadając na pytania, sprawdzisz, czy jesteś przygotowany do wykonania ćwiczeń.

1. Jakie są rodzaje układów odniesienia?
2. Jakie są rodzaje ruchu?
3. Jakimi parametrami charakteryzuje się ruch prostoliniowy jednostajny?
4. Jakimi parametrami charakteryzuje się ruch prostoliniowy zmienny?
5. Jakimi parametrami charakteryzuje się ruch krzywoliniowy jednostajny?
6. Jakimi parametrami charakteryzuje się ruch krzywoliniowy zmienny?
7. Jakimi parametrami charakteryzuje się ruch jednostajny po okręgu?
8. Jakimi parametrami charakteryzuje się ruch zmienny po okręgu?
9. Jaka jest zależność prędkości dwóch dowolnych punktów ciała sztywnego?
10. Jaka jest zależność przyspieszeń dwóch dowolnych punktów ciała sztywnego?
11. Jakie są rodzaje mechanizmów?
12. W jakim celu wykreśla się plany prędkości i przyspieszeń?
13. Jakie są kolejne czynności kreślenia planu prędkości?
14. Jakie są kolejne czynności kreślenia planu przyspieszeń?
15. Jak oblicza się prędkości obrotowe kół zębatych przekładni planetarnych?

4.4.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 1

Oblicz przyspieszenie wózka poruszającego się po okręgu o promieniu $r = 1$ metr i poruszającego się ze stałą prędkością $V = 30$ km/godz.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) określić jakie rodzaje przyspieszeń wystąpią w zadaniu,
- 2) zamienić prędkość wyrażoną w km/godzinę na prędkość wyrażoną w m/s,
- 3) obliczyć przyspieszenie wózka.

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 2

Oblicz przyspieszenie styczne, normalne i całkowite wózka poruszającego się po okręgu o promieniu $r = 2$ metry i poruszającego się ruchem jednostajnie opóźnionym. Długość zakrętu wynosi $\frac{1}{2}$ koła (πr), prędkość przy wjeździe na zakręt wynosi 2 m/s², a przy wyjeździe 1 m/s².

Sposób wykonania ćwiczenia

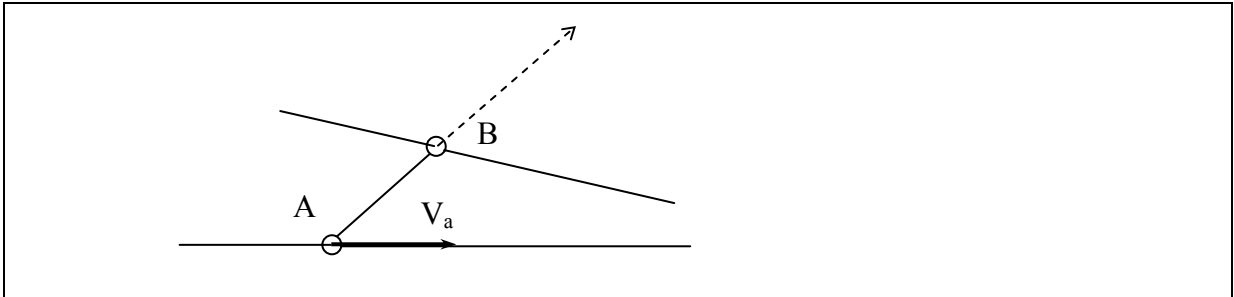
Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) określić jakie rodzaje przyspieszeń wystąpią w zadaniu, wykonaj szkic,
- 2) obliczyć średnią prędkość wózka na zakręcie,
- 3) obliczyć czas przejazdu przez zakręt,
- 4) obliczyć przyspieszenie styczne ze wzoru na prędkość w ruchu prostoliniowym,
- 5) obliczyć przyspieszenie normalne,
- 6) obliczyć przyspieszenie całkowite.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 3

Korzystając z metody wykreślnej znajdź prędkość punktu B, mając daną prędkość punktu A. Mechanizm składa się z pręta A, B z oczkami na końcach. Oczka przesuwały się po dwóch naciągniętych drutach.



Sposób wykonania ćwiczenia

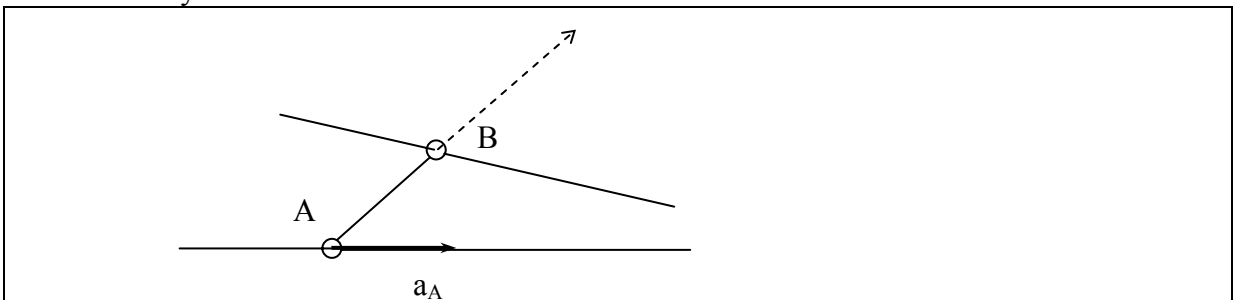
Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) wykonać rzut prędkości V_A na prostą łączącą punkty A i B. Przenieś ten rzut do B i oznacz go V_{Bx} ,
- 2) wykonać rzut prędkości V_{Bx} na prostą określającą kierunek prowadnicy punktu B.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Ołówek, linijka z podziałką, trójkąt, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 4

Korzystając z metody wykreślnej znajdź przyspieszenia punktu B: całkowite oraz normalne i styczne.



Sposób wykonania ćwiczenia

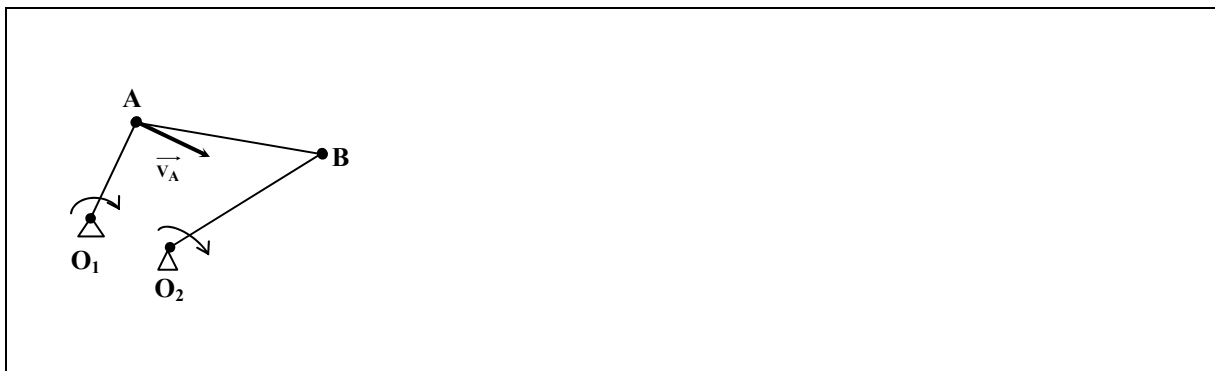
Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) przenieść wektor przyspieszenia punktu A do punktu B,
- 2) znając kierunek przyspieszenia punktu B wykonać rzut przyspieszenia a_A na ten kierunek. Wykreślić wektor przyspieszenia a_B ,
- 3) wykreślić wektor przyspieszenia a_{AB} . (Wiedząc, że przyspieszenie a_B jest sumą przyspieszenia a_A i a_{AB}),
- 4) wykreślić wektory przyspieszeń a_{Bt} i a_{Bn} . (Wiedząc, że przyspieszenie a_{AB} jest sumą przyspieszenia a_{Bn} i a_{Bt}).

Wyposażenie stanowiska pracy:
Ołówek, linijka z podziałką, trójkąt, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 5

Korzystając z metody planu prędkości znajdź prędkość punktu B oraz prędkość punktu B względem A. Przyjmij podziałkę 1 cm = 1 m/s.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) przenieść prędkość V_A do oznaczonego obok bieguna planu prędkości,
- 2) z końca wektora V_A wykreślić prostą prostopadłą do ogniwa AB,
- 3) z początku wektora V_A wykreślić prostopadłą do ogniwa O_2B ,
- 4) wykreślić wektor prędkości punktu B (V_B),
- 5) wykreślić wektor prędkości V_{BA} .

Wyposażenie stanowiska pracy:

Ołówek, linijka z podziałką, trójkąt, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 6

Korzystając z metody planu przyspieszeń znajdź przyspieszenie punktu B oraz jego przyspieszenie styczne i normalne. Przyjmij podziałkę 1 cm = 1 m/s; 1 cm = 1 m/s²; dla ogniwa 1 cm = 1 metr.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) wykreślić plan prędkości,
- 2) zmierzyć prędkości (V_B i V_{BA}) na planie i oblicz ich wartości (zmierzoną długość w [cm] przemnoż przez podziałkę),
- 3) obliczyć przyspieszenie punktu A,
- 4) wykreślić przyspieszenie punktu A z przyjętego bieguna przyspieszeń,

- 5) obliczyć przyspieszenie a_{BA}^n ,
- 6) wykreślić przyspieszenie a_{BA}^n na planie przyspieszeń,
- 7) prostopadle do przyspieszenia a_{BA}^n wykreślić kierunek przyspieszenia a_{BA}^t ,
- 8) obliczyć przyspieszenie normalne punktu B (a_B^n). Nanieś go na plan przyspieszeń,
- 9) prostopadle do przyspieszenia a_B^n wykreślić kierunek przyspieszenia a_B^t ,
- 10) wykreślić przyspieszenie punktu B,
- 11) zmierzyć długości wektorów oraz oblicz wartości przyspieszeń całkowitego, normalnego i stycznego punktu „B”.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Ołówek, linijka z podziałką, trójkąt, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 7

Mając dane obroty ramienia $n_a = 1000$ obr/min oraz liczby zębów:
 $z_1 = 77$ $z_2 = 70$ $z_3 = 63$ $z_4 = 70$.

Oblicz obroty poszczególnych kół zębatych (n_2, n_3, n_4) dla układu 1 przekładni z rysunku 32.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) przeanalizować wzory z tabeli 2 dla układu „1” przekładni.
- 2) podstawić dane. Oblicz prędkości kół 2,3 oraz 4 (koło 1 ma prędkość „0”).

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 8

Mając dane obroty ramienia $n_a = 1000$ obr/min oraz liczby zębów:
 $z_1 = 20$ $z_2 = 20$ $z_3 = 40$ $z_4 = 110$

Oblicz obroty poszczególnych kół zębatych (n_2, n_3, n_4) dla układu „1” przekładni z rysunku 32.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) zapoznać się z wzorami z tabeli 2 dla układu „2” przekładni,
- 2) podstawić dane. Oblicz prędkości kół 2,3 oraz 4 (koło 1 ma prędkość „0”).

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

4.4.4. Sprawdzian postępów

	Tak	Nie
Czy potrafisz:		
1) rozróżnić układy odniesienia stosowane przy obliczaniu prędkości i przyspieszeń?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2) rozróżnić ruchy: prostoliniowy, krzywoliniowy, obrotowy?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3) rozróżnić ruch jednostajny i zmienny?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4) obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu materialnego w ruchu zmiennym?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5) obliczyć prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu ciała sztywnego?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6) wykonać plany prędkości członów?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7) wykonać plany przyspieszeń członów?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8) obliczyć prędkości obrotowe kół przekładni obiegowej?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4.5. Dynamika

4.5.1. Materiał nauczania

Dynamika punktu materialnego

Dynamiką nazywamy dział mechaniki zajmujący się badaniem ruchu ciał z uwzględnieniem przyczyn wywołujących ten ruch. Dynamika opiera się na pewnych zasadach.

Zasada 1. Ciało pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym, jeżeli na to ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się.

Z zasady tej wynikają następujące wnioski:

- ciało znajdujące się w spoczynku nie może bez działania nań siły rozpocząć ruchu,
- jeżeli na poruszające się ciało nie działa żadna siła, to ruch tego ciała musi być prostoliniowy jednostajny,
- ruch niejednostajny lub ruch krzywoliniowy może ciało wykonywać tylko na skutek działania nań siły.

Zasada 2. Każda siła przyłożona do ciała nadaje temu ciału przyspieszenia. Przyspieszenie to jest skierowane wzdłuż linii działania przyłożonej siły, a jego wartość jest wprost proporcjonalna do wartości tej siły.

Powyższa zasada jest wyrażona wzorem:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

gdzie:

F – działająca siła, [N] – niuton – [N] = [1 kg · m / s²]

a – przyspieszenie,

m – masa poruszającego się ciała.

Równanie to nazywamy podstawowym równaniem dynamiki (dynamicznym równaniem ruchu).

Zasada 3. Każdemu działaniu towarzyszy równe, lecz przeciwnie zwrócone przeciwdziałanie.

Siła bezwładności

Jeżeli pchniemy wózek, na którym leży piłka (nadamy mu przyspieszenie) to okaże się, że piłka będzie poruszać się po platformie wózka w stronę przeciwną. Dowodzi to, że na piłkę działa jakaś siła. Siłę tę nazywamy siłą bezwładności. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki siła ta będzie równa:

$$\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a} \quad \text{– minus oznacza, że zwrot jest przeciwny do siły wywieranej na wózek.}$$

Gdyby piłkę przymocować do platformy to siła bezwładności nie spowoduje ruchu piłki. Siła bezwładności jednak wystąpi. Będzie to siła bezwładności całego układu (wózka i piłki). Jej wartość równa będzie iloczynowi masy układu i przyspieszenia (ze znakiem minus). Wektor siły bezwładności jest przyczepiony w środku ciężkości ciała.

Pomocna w rozwiązywaniu zadań jest zasada d'Alemberta, która brzmi:

Suma sił zewnętrznych działających na ciało równoważy się z siłą bezwładności.

Wynika to z porównania sił „F” i „F_b”.

$$\vec{F} + (-m \cdot \vec{a}) = 0 \quad \text{lub} \quad \vec{F} + \vec{F}_b = 0$$

Równanie to ma postać równania ze statyki. Jest to warunek równowagi sił.

Jeżeli na ciało działa wiele innych sił to zależność ta wyrażona będzie wzorem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_b = 0$$

Praca, moc, sprawność

Praca mechaniczna (W)

Praca mechaniczna (W) jest równa iloczynowi wartości siły (F) działającej wzdłuż kierunku ruchu i drogi, jaką przebył punkt zaczepienia tej siły.

$$W = F \cdot s$$

Jeżeli wystąpią siły działające przeciwnie ruchowi, to praca tych sił jest pracą ujemną.

$$W = - F \cdot s.$$

Jednostką pracy w układzie SI jest dżul [J].

$$1J = 1 N \cdot m$$

Praca w ruchu obrotowym (W) jest iloczynem momentu obrotowego (M) i kąta obrotu (α) wyrażonego w radianach i wyrażona wzorem:

$$W = M \cdot \alpha$$

Jeżeli ciało zsuwa lub spada z wysokości to wykona pracę zwaną „Pracą sił ciężkości”. Praca ta jest iloczynem ciężaru ciała ($m \cdot g$) i różnicy poziomów położenia początkowego i końcowego (h). Praca ta wyraża się wzorem:

$$W = m \cdot g \cdot h$$

Energia mechaniczna

Ciało będące w ruchu tak jak i ciało znajdujące się na pewnej wysokości posiada pewną energię, równoważną pracy jaką może być wykonana przez to ciało.

Ciało znajdujące się na wysokości posiada w sobie energię zwaną „energiją potencjalną” lub energią położenia. Jeżeli to ciało spadnie to wykona pracę sił ciężkości. Energia potencjalna wyraża się wzorem:

$$E_p = m g h \quad [J]$$

Ciało znajdujące się w ruchu również posiada energię zwaną „energiją kinetyczną”, lub energię ruchu. Energia kinetyczna wyraża się wzorem:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad [J]$$

Energia mechaniczna jest sumą energii potencjalnej i energii kinetycznej:

$$E = E_p + E_k$$

Moc

Mocą nazywamy stosunek pracy (W) i czasu (t), w którym ta praca została wykonana.

$$P = W/t$$

Jeżeli praca wyrażona jest iloczynem siły i drogi to;

$$P = F s/t \quad \text{lub} \quad P = F v$$

W ruchu obrotowym moc wyrażona jest wzorem;

$$P = M \omega$$

Jednostką mocy w układzie SI jest wat.

$$1W = 1 J/s - \text{dżul/sekundę}$$

Jeżeli moment jest podany w N m [niuton x metr], obroty w obr/min, a chcemy otrzymać moc w KW to:

$$P = M \pi n/30 0$$

Z tego wzoru możemy uzyskać wzór na moment obrotowy silnika.

$$M = 9554,14 \frac{P}{n} \text{ [Nm]}$$

Sprawność

Wprawienie w ruch maszyny i podtrzymanie tego ruchu wymaga włożenia pewnej pracy. Część tej pracy jest pracą użyteczną, czyli spożytą na wykonanie celowej pracy. Część natomiast zużywana jest na pokonanie oporów tarcia, czynników środowiska. Pracę tę nazywamy „pracą traconą”.

Praca jaką musimy włożyć (W) równa się pracy użytecznej (W_u) i pracy traconej (W_s):

$$W = W_u + W_s$$

Stosunek pracy użytecznej do pracy włożonej nazywamy sprawnością maszyny i oznaczamy literą „ η ” – (eta).

$$\eta = W_u / W$$

Sprawność możemy wyrażać również stosunkiem mocy użytecznej (P_u) do mocy włożonej (P).

$$\eta = P_u / P$$

Sprawność przyjmuje wartości od „0” do „1”. Bardzo często sprawność wyrażamy w „%”.

$$\eta = (P_u / P) \cdot 100\%$$

Sprawność może więc przyjmować wartości od 0% do 100%, chociaż zbyt niska sprawność nie ma sensu (cała praca byłaby tracona). Sprawność nigdy też nie osiąga 100%, gdyż zawsze część pracy tracimy.

Uderzenie

Wyróżniamy następujące rodzaje uderzeń dwóch ciał:

- uderzenie sprężyste – występuje jeżeli dwa ciała zderzą się sprężysto (dwie kule bilardowe). W czasie uderzenia ciała odkształcają się na chwilę i powrócą do swojego pierwotnego kształtu,
- uderzenie niesprężyste (plastyczne) – występuje jeżeli dwa ciała zderzą się plastycznie (dwie kulki plasteliny). W czasie uderzenia ciała odkształcają się trwale,
- uderzenie częściowo sprężyste – występuje wtedy gdy zderzające się ciała częściowo odkształcają się plastycznie, a częściowo sprężysto. W praktyce najczęściej występuje ten przypadek.

W czasie uderzenia dwóch ciał najpierw połączą się (jednocześnie odkształcając sprężysto i plastycznie). W tym czasie poruszać się będą z taką samą prędkością równą:

$$u = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

Po chwili odkształcenia sprężyste ustąpi i ciała rozdzielią się i poruszać się będą z różnymi prędkościami.

Prędkości te będą wynosiły:

$$w_1 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2 - (V_1 - V_2) k}{m_1 + m_2} \qquad w_2 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2 - (V_2 - V_1) k}{m_1 + m_2}$$

gdzie:

m_1, m_2 – masy ciał zderzających się,

V_1, V_2 – prędkości ciał przed zderzeniem,

k – współczynnik uderzenia wyznaczany doświadczalnie. Wynosi od 0 do 1. Dla ciał sprężystych wynosi 1, a dla plastycznych wynosi 0.

Ciała, które się zderzają, posiadają swoje energie kinetyczne. Suma energii kinetycznych wynosi:

$$E_0 = \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2)$$

Po zderzeniu plastycznym energia kinetyczna tych ciał wynosi:

$$E_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$$

Różnica $E_0 - E_1$ jest stratą energii podczas uderzenia.

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_1 - V_2)$$

Uderzenie zachodzi na przykład podczas kucia i wbijania pali. Podczas kucia (prędkość $V_2 = 0$) cała strata energii powoduje odkształcenie kutego materiału. Zależy nam więc, aby była ona jak największa. Przy wbijaniu pali natomiast zależy nam, aby jak najmniej następowało odkształceń plastycznych (najmniej strat energii), a energia po uderzeniu była jak największa (energia ta przekształca się na pracę pala powodującą jego zagłębienia się. Sprawności kucia i wbijania będą wynosiły:

Dla kucia: $\eta = \Delta E / E_0$

Dla wbijania: $\eta = E_1 / E_0$

Dynamika ruchu obrotowego ciał sztywnych

Masowy moment bezwładności

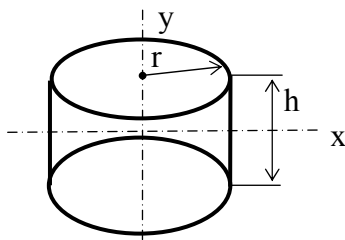
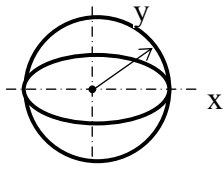
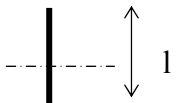
Masowy moment bezwładności jest wielkością charakteryzującą ciało sztywne obracające się i zależy od jego masy i kształtu. (Pojęcie „moment bezwładności” występuje również w nauce o wytrzymałości materiału. Jest to jednak całkiem inna wielkość, zależna od wymiaru i kształtu powierzchni przekroju. Różnicować je można nazwą. W dynamice „Masowy moment bezwładności”, w wytrzymałości materiałów „Moment bezwładności”).

Masowy moment bezwładności obliczamy z odpowiednich tablic. Zależy on jest od osi obrotu. Dla niesymetrycznych ciał moment wobec osi „x” będzie inny niż wobec osi „y”.

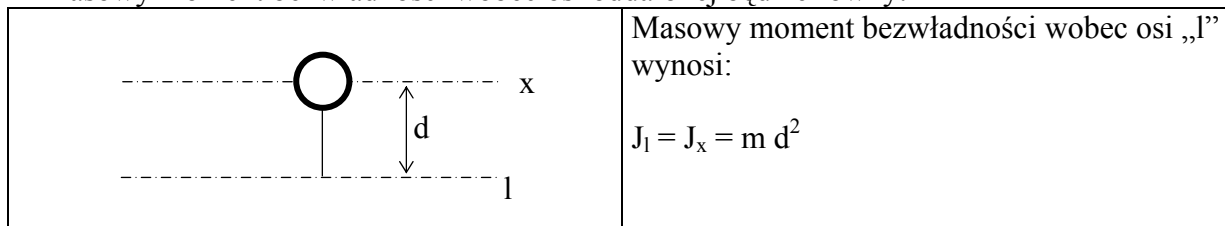
Masowy moment bezwładności oznaczamy literą „J”. Jednostką masowego momentu bezwładności jest $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$.

Poniżej podano kilka przykładów.

Tablica 3. Masowe momenty bezwładności (wybrane przykłady)

Tarcza lub walec	
$J_x = m / 4 (r^2 + h^2 / 3)$ $J_y = m r^2 / 2$	
Kula o promieniu „r”	
$J_x = J_y = 2 / 5 m r^2$	
Cienki pręt	
$J_x = m l^2 / 12$ $J_y = 0$	

Masowy moment bezwładności wobec osi oddalonej będzie równy:



Rys. 33. Obliczanie momentu bezwładności wobec osi oddalonej od ciała

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Energia kinetyczna obracającego się ciała równa jest iloczynowi połowy masowego momentu bezwładności i prędkości kątowej:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega$$

Dynamiczne równanie ruchu obrotowego:

Aby nadać ciału przyspieszenie kątowe „ ε ”, należy na nie działać momentem obrotowym „ M ”, równym iloczynowi momentu bezwładności tego ciała względem osi obrotu i przyspieszenia kątowego „ ε ”.

$$M = J \cdot \varepsilon$$

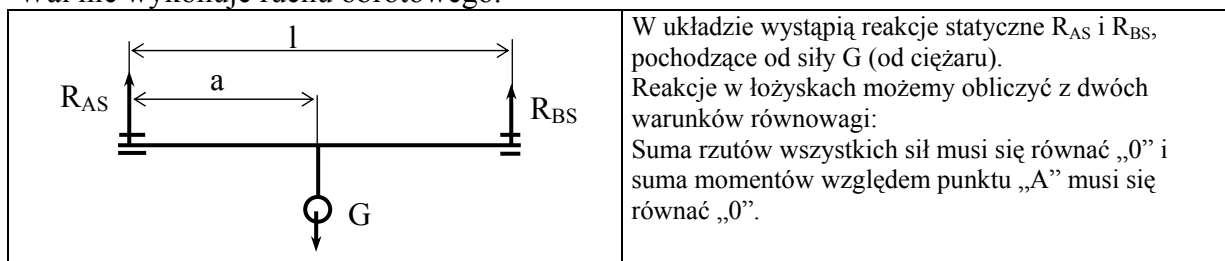
Wzór ten nazywamy dynamicznym równaniem ruchu obrotowego.

W ruchu obrotowym moment sił zewnętrznych równoważy się z momentem sił bezwładności. Jest to zasada d’Alemberta dla ruchu obrotowego. Zasadę tę można wyrazić równaniem:

$$M + (-J \varepsilon) = 0$$

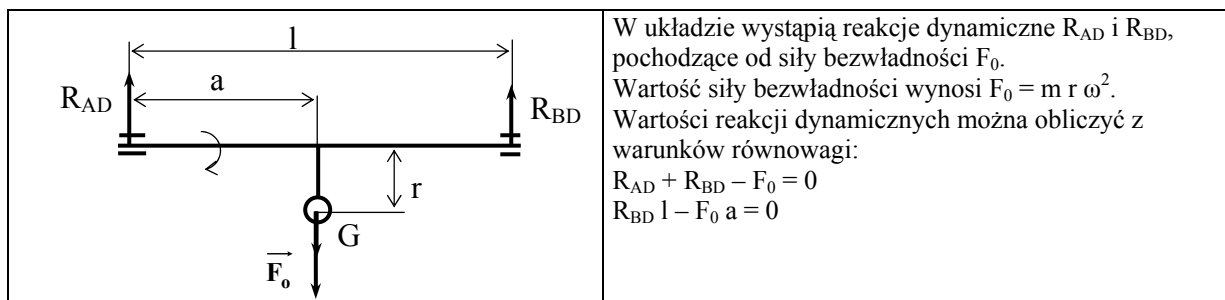
Reakcje dynamiczne

Na rysunku 34 przedstawiono wał osadzony w łożyskach z przymocowanym ciężarem. Wał nie wykonuje ruchu obrotowego.



Rys. 34. Obliczenie reakcji w łożyskach dla wału w spoczynku

Dla ciał wirujących zachodzić może zjawisko niewyrównowazenia dynamicznego. Wystąpią wtedy dodatkowe siły, poza obciążeniem, działające na układ. Na rysunku przedstawiono osadzony w łożyskach, obciążony wał, który obraca się.



Rys. 35. Obliczenie reakcji dynamicznych w łożyskach dla wału w ruchu.

Reakcje całkowite w łożyskach będą sumą (dla położenia ciężaru na dole) lub różnicą reakcji statycznych i dynamicznych.

$$R_A = R_{AS} + R_{AD}$$

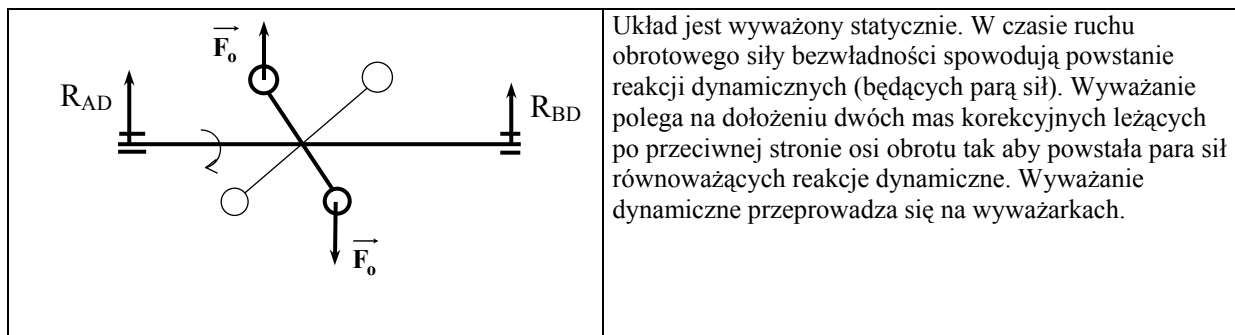
$$R_B = R_{BS} + R_{BD}$$

Wyrównoważanie (wyważanie)

Ciała mające wykonywać ruch wirowy wyważamy statycznie, dynamicznie i statyczno-dynamicznie. Niewyważone ciała wirujące powodują drgania układu i przyczyniają się do szybkiego zużycia.

Wyważanie statyczne przeprowadza się wtedy, gdy oś obrotu nie przechodzi przez środek ciężkości. Jest to zjawisko niekorzystne, gdyż wystąpią drgania układu mogące spowodować jego uszkodzenie. Wyważyć statycznie możemy poprzez przyłożenie dodatkowej masy po przeciwnej stronie od odchylenia środka ciężkości (dodanie masy korekcyjnej) lub ujęcie masy po tej samej stronie.

Wyważanie dynamiczne przeprowadza się wtedy, gdy środek ciężkości leży na osi obrotu, lecz oś ta nie pokrywa się z główną osią bezwładności. Pokazuje to rysunek 36.



Rys. 36. Wyważanie dynamiczne

Wyważanie statyczno-dynamiczne zachodzi, gdy środek ciężkości nie leży w osi obrotu i jednocześnie oś obrotu nie pokrywa się z główną osią bezwładności. Wyważanie polega na dodaniu lub ujęciu odpowiednich mas w odpowiednich miejscach. Wyważanie to przeprowadza się na wyważarkach.

4.5.2. Pytania sprawdzające

Odpowiadając na pytania, sprawdzisz, czy jesteś przygotowany do wykonania ćwiczeń.

1. Jaki jest wzór podstawowego równania dynamiki?
2. Jaki jest wzór na siłę bezwładności ciała?
3. Na czym polega zasada d'Alemberta?
4. Jaka jest definicja pracy w ruchu postępowym?
5. Jaka jest definicja pracy w ruchu obrotowym?
6. Jaka jest definicja pracy sił ciężkości?
7. Z jakiego wzoru obliczamy energię potencjalną?
8. Z jakiego wzoru obliczamy energię kinetyczną?
9. Co to jest moc?
10. W jakich jednostkach (zgodnie z układem SI) wyrażamy moc?
11. Co to jest sprawność?
12. Jaką wartość w procentach może przyjmować sprawność?
13. Jakie rodzaje uderzeń możemy wyróżnić?
14. Jak obliczyć energię strat przy uderzeniu?
15. Jak oblicza się sprawność w procesie kucia i wbijania?

16. Jak oblicza się masowy moment bezwładności?
17. Jak oblicza się energię kinetyczną ciała w ruchu obrotowym?
18. Jaka jest zasada d'Alemberta dla ruchu obrotowego?
19. Jak wyznacza się reakcje dynamiczne?
20. Jaka jest różnica między wyważaniem statycznym i dynamicznym?

4.5.3. Ćwiczenia

Ćwiczenie 1

Oblicz siłę na haku samochodu ciągnącego przyczepę o masie $m = 400$ kg, jeżeli od chwili startu osiąga on w czasie 0,5 minuty prędkość 60 km/godzinę. Wartość oporów ruchu wynosi 4% ciężaru przyczepy.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) przeliczyć prędkość wyrażoną w km/godz na prędkość wyrażoną w m/s oraz czas wyrażony w minutach na czas wyrażony w sekundach,
- 2) obliczyć ciężar przyczepy (przyjąć: $g = 9,81$ m/s²). Obliczyć wartość siły oporów ruchu,
- 3) obliczyć siłę bezwładności,
- 4) napisać warunek równowagi wszystkich sił działających na przyczepę,
- 5) przekształcić wzór pozostawiając siłę ciągnącą po jednej stronie równania, a siłę oporów i bezwładności po drugiej. Podstaw dane. Oblicz siłę na haku.

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 2

Oblicz pracę, jaką wykona dźwig podnosząc ciężar 3 tony na wysokość 10 metrów oraz energię jaką ono uzyska

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) obliczyć masę podnoszonego ciężaru. Podaj ją w [kg],
- 2) obliczyć pracę. Przyspieszenie ziemskie przyjmij 9,81 m/s²,
- 3) obliczyć energię.

Wyposażenie stanowiska pracy:

Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 3

Oblicz sprawność dźwigu podnoszącego ciało o masie 3 000 kg na wysokość 10 metrów w ciągu 2 minut. Moc silnika dźwigu wynosi 4 kW.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczenie powinieneś:

- 1) obliczyć moc użyteczną dźwigu,
- 2) obliczyć sprawność przyjmując, że moc włożona jest równa mocy silnika dźwigu.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 4

Oblicz moc potrzebną do pokonania tarcia w łożysku ślizgowym wału. Reakcja pionowa w łożysku wynosi 1000 N. Wał obraca się z prędkością 500 obr/minutę. Średnica wału wynosi 40 mm. Współczynnik tarcia wału o panewkę łożyska wynosi 0,05.

Sposób wykonania ćwiczenia

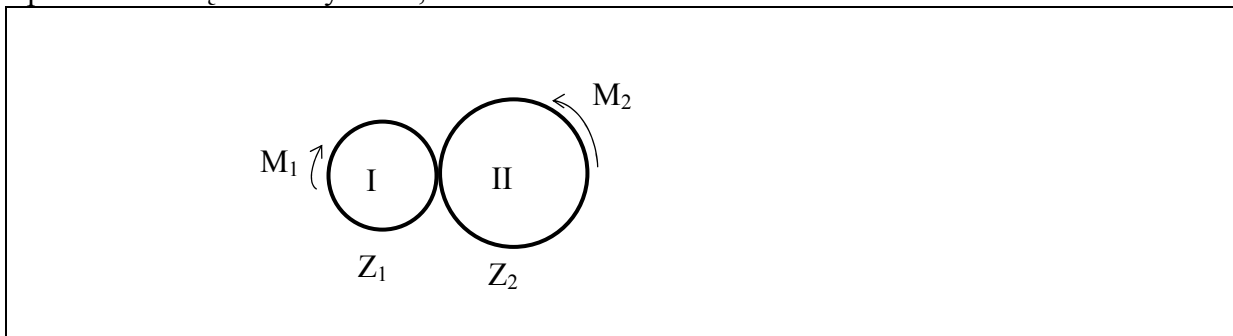
Aby wykonać ćwiczeni powinienes:

- 1) obliczyć moment tarcia,
- 2) obliczyć moc potrzebną do pokonania tarcia.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 5

Oblicz moc na wale „II” przekładni zębatej z rysunku. Prędkość obrotowa wału „I” wynosi 10 obr/min. Moment na wale „I” wynosi 100 Nm. Sprawność łożysk wynosi po 0,95, sprawność ząbienia wynosi 0,98.



Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczeni powinienes:

- 1) wykorzystać wzory na moc i sprawność,
- 2) obliczyć moc na kole II.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 6

Oblicz sprawność kucia. Bijak młota ma masę 500 kg, masa kowadła z kutym materiałem wynosi 5000 kg. Bijak uderza w materiał spadając swobodnie z wysokości 1 metra.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczeni powinienes:

- 1) wykorzystać wzory na sprawność przy kuciu, energię kinetyczną przed uderzeniem, po uderzeniu, stratę energii oraz prędkość po uderzeniu,

- 2) obliczyć energię kinetyczną przed uderzeniem,
- 3) obliczyć prędkość wspólną po uderzeniu,
- 4) obliczyć energię kinetyczną po uderzeniu,
- 5) obliczyć energię strat,
- 6) obliczyć sprawność kucia.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 7

Oblicz masowy moment bezwładności dla zaczepionej na drucie kulki, wykonującej ruch obrotowy po kole o promieniu 1 metr. Masę drutu pomiń. Masa kulki 1 kg, średnica kulki 10 cm.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczeni powinieneś:

- 1) obliczyć moment bezwładności dla układu.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

Ćwiczenie 8

Oblicz reakcje w łożyskach dla układu przedstawianego na rysunku 35, w położeniu gdy ciężar znajduje się na dole i gdy znajduje się na górze. Prędkość obrotowa $\omega = 50$ rad/sek. Masa kulki = 2 kg, odległość $r = 0,1$ metra. Długość wału $l = 1$ metr, odległość $a = 0,4$ metra.

Sposób wykonania ćwiczenia

Aby wykonać ćwiczeni powinieneś:

- 1) wykorzystać wzór na siłę bezwładności w ruchu obrotowym,
- 2) obliczyć reakcje statyczne z warunków równowagi,
- 3) obliczyć reakcje dynamiczne z warunków równowagi,
- 4) obliczyć reakcje w położeniu dolnym ciężaru,
- 5) obliczyć reakcje w położeniu górnym ciężaru.

Wyposażenie stanowiska pracy:
Kalkulator, kartka, ołówek, literatura uzupełniająca.

4.5.4. Sprawdzian postępów

	Tak	Nie
Czy potrafisz:		
1) wykorzystać do obliczeń wzór podstawowego równania dynamiki?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2) obliczyć siłę bezwładności?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3) obliczyć pracę w ruchu postępowym?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4) obliczyć energię kinetyczną i potencjalną?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5) obliczyć moc?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6) obliczyć sprawność?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7) obliczyć energię strat przy uderzeniu?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8) obliczyć reakcje dynamiczne?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9) rozróżnić wyważanie dynamiczne i statyczne?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5. SPRAWDZIAN OSIĄGNIĘĆ

INSTRUKCJA DLA UCZNIĄ

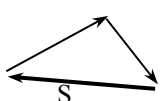
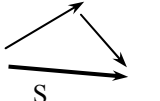


1. Przeczytaj uważnie instrukcję.
2. Podpisz imieniem i nazwiskiem kartę odpowiedzi.
3. Zapoznaj się z zestawem pytań testowych.
4. Test zawiera 30 pytań. Tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.
5. Udzielaj odpowiedzi tylko na załączonej karcie odpowiedzi, stawiając w odpowiedniej rubryce znak X. W przypadku pomyłki należy błędną odpowiedź zaznaczyć kółkiem, a następnie ponownie zakreślić odpowiedź prawidłową.
6. Pracuj samodzielnie, bo tylko wtedy będziesz miał satysfakcję z wykonanego zadania.
7. Jeśli udzielenie odpowiedzi będzie Ci sprawiało trudność, odłóż jego rozwiązanie na później i wróć do niego, gdy zostanie Ci wolny czas.
8. Na rozwiązanie testu masz 120 min.
Powodzenia!

ZESTAW ZADAŃ TESTOWYCH

1. Rozróżniamy następujące modele ciał:

A	punkt materialny, odcinek materialny, figurę materialną, bryłę materialną
B	punkt materialny, ciało sztywne, ciało sprężyste, ciało sprężysto-plastyczne
C	ciało sztywne, ciało sprężyste, ciało plastyczne
D	punkt materialny, punkt niematerialny, ciało sprężyste, ciało plastyczne

2. Spośród przedstawionych poniżej sum wektorów prawidłowa jest:

A	B	C	D
			

3. Siły zewnętrzne działające na ciało możemy podzielić na:

- A. Siły czynne i ciężary: B. Siły naporu i siły oporu
C. Siły czynne i siły bierne D. Siły czynne i reakcje

4. Masa ciała wynosi 10 kg, przyspieszenie ziemskie $9,81 \text{ m/s}^2$. Jego ciężar wynosi:

- A. 9,81 kg B. 98,1 kG C. 9,81 N D. 98,1 N

5. Dobierz poprawne zakończenie zdania:

Reakcja w podporze ruchomej:

- A. jest prostopadła do powierzchni napierającej,
B. jest równoległa do powierzchni napierającej,
C. ma jedynie znany punkt zaczepienia,
D. biegnie wzdłuż linii przytrzymującej siłę.

6. Dobierz poprawne zakończenie zdania:

W podporze wiotkiej (ciężar zawieszony na linie) reakcja:

- A. ma początek w środku ciężkości zaczepionego ciężaru i biegnie wzdłuż liny,
B. ma znany tylko punkt zaczepienia,

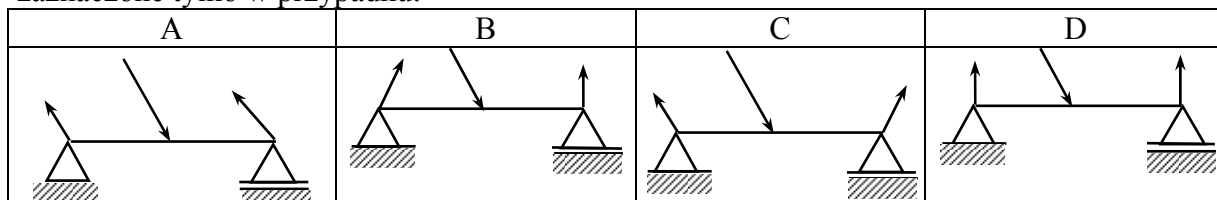
- C. ma znany tylko kierunek działania,
- D. ma początek w punkcie zaczepienia i biegnie wzdłuż liny.

7. Dobierz poprawne zakończenie zdania:

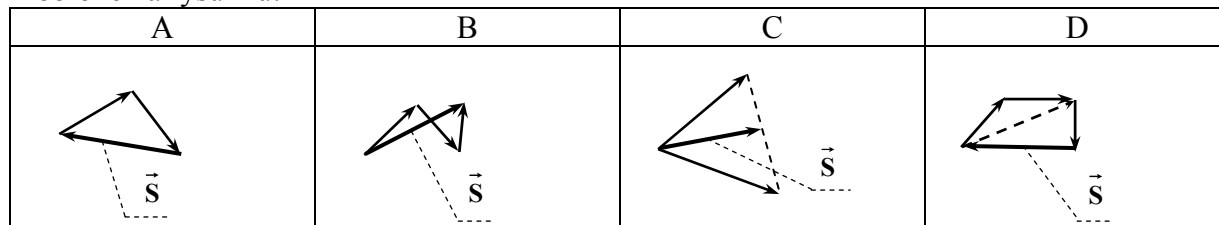
Reakcja w podporze stałej:

- A. jest prostopadła do powierzchni napierającej. B. jest równoległa do powierzchni napierającej.
- C. ma jedynie znany punkt zaczepienia. D. biegnie wzdłuż linii przytrzymującej siłę.

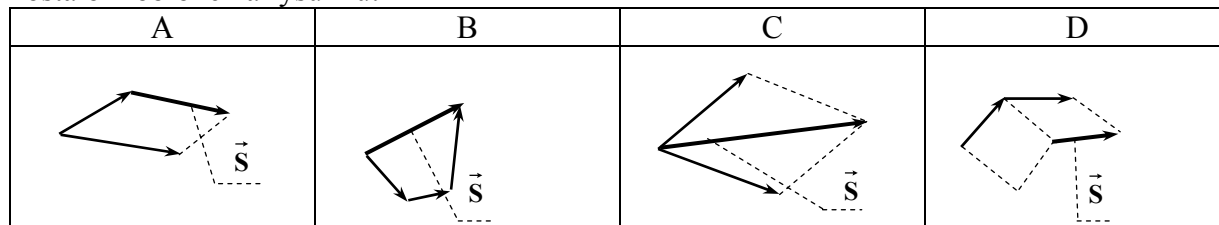
8. Dla przedstawionej poniżej belki oznaczono reakcje w podporach. Reakcje te są poprawnie zaznaczone tylko w przypadku:



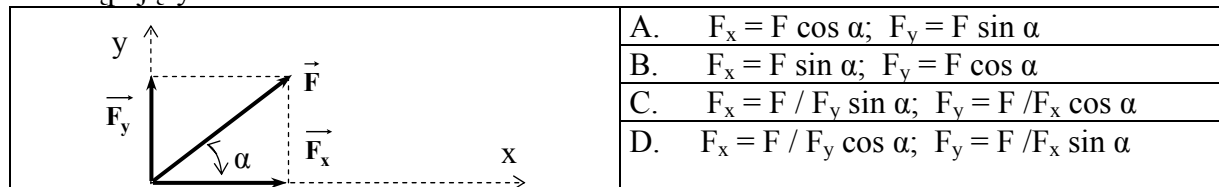
9. Na przedstawionym poniżej rysunku złożono siły metodą wieloboku. Poprawnie to zostało zrobione na rysunku:



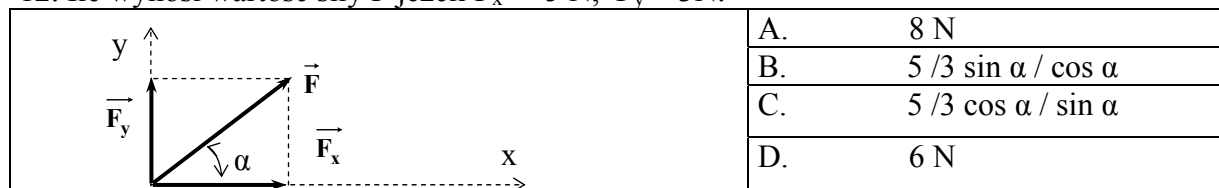
10. Na przedstawionym poniżej rysunku złożono siły metodą równoległoboku. Poprawnie to zostało zrobione na rysunku:



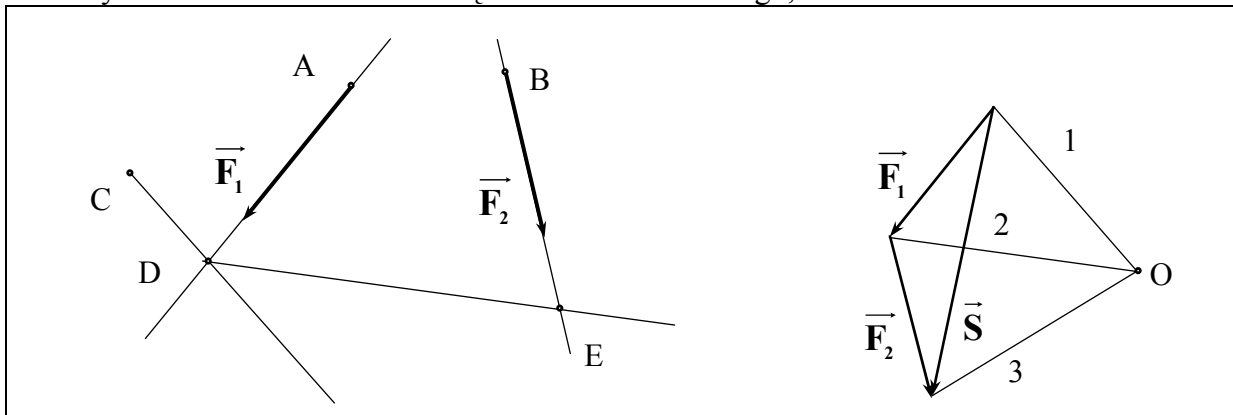
11. Na rysunku rozłożono siłę na dwie składowe. Wartości sił składowych można obliczyć z następujących wzorów:



12. Ile wynosi wartość siły F jeżeli $F_x = 5 \text{ N}$, $F_y = 3 \text{ N}$.



13. Warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił są następujące:
- suma sił wszystkich sił = 0. Suma momentów = 0,
 - suma wszystkich sił i momentów = 0,
 - suma rzutów wszystkich sił na oś „x” = 0. Suma rzutów wszystkich sił na oś „y” = 0,
 - suma momentów względem osi „x” = 0. Suma momentów względem osi „y” = 0.
14. Siła $F = 10 \text{ N}$ działa na ramieniu 10 cm . Moment siły będzie równy:
- 1 Nm
 - 10 Nm
 - 100 Nm
 - 98,1 Nm
15. Wykonano składanie sił metodą wieloboku sznurowego, lecz nie zakończono zadania.



Nie wykonano następujących czynności:

- nie przeniesiono siły „S” do punktu „E”,
- nie obliczono wartości siły „S” i nie przeniesiono jej do punktu „E”,
- nie przeniesiono promienia „3” do punktu „E” i siły „S” do punktu przecięcia się promienia „1” i „3”,
- nie przeniesiono promienia „3” do punktu „D” i siły „S” do punktu „E”.

16. Warunki równowagi dowolnego płaskiego układu sił są następujące:

1. suma rzutów wszystkich sił na oś „x” musi się równać „0”,
2. suma rzutów wszystkich sił na oś „y” musi się równać „0”,
3. suma momentów wszystkich sił względem dowolnego bieguna musi się równać „0”.
1. suma rzutów wszystkich sił na oś „x” musi się równać „0”,
2. suma rzutów wszystkich sił na oś „y” musi się równać „0”,
3. suma momentów wszystkich sił na oś „z” musi się równać „0”.
1. suma rzutów wszystkich sił na oś „x” i „y” musi się równać „0”,
2. suma momentów wszystkich sił względem siły składowej musi się równać „0”.
1. suma wszystkich sił musi się równać „0”,
2. suma momentów wszystkich sił musi się równać „0”.

17. Wylicz reakcje w podporach „A” i „B”. dane; Siły $F_1 = F_2 = 5 \text{ N}$. $a = 2 \text{ m}$.

A. $R_A = 10 \text{ N}$; $R_B = 10 \text{ N}$.	
B. $R_A = 5 \text{ N}$; $R_B = 5 \text{ N}$.	
C. $R_A = 10 \text{ N}$; $R_B = 5 \text{ N}$.	
D. $R_A = 7,5 \text{ N}$; $R_B = 2,5 \text{ N}$.	

18. Jaka jest współrzędna „ x_0 ” środka ciężkości powierzchni z rysunku?

A. $x_0 = 2$	
B. $x_0 = 12/20$	
C. $x_0 = 20/12$	
D. $x_0 = 21/12$	

19. Prędkość bezwzględna punktu B będzie się równać sumie wektorów:

A. $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega \vec{r}$	
B. $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$	
C. $\vec{V}_B = \vec{V}_{BA} + \omega \vec{r}$	
D. $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} + \omega \vec{r}$	

20. Przyspieszenie bezwzględne punktu B będzie się równać:

A. Sumie wektora przyspieszenia punktu A i przyspieszenia normalnego punktu B względem A	
B. Sumie wektora przyspieszenia punktu A i przyspieszenia stycznego punktu B względem A	
C. Sumie wektora przyspieszenia punktu A oraz przyspieszenia normalnego i stycznego punktu B względem A	
D. Sumie wektora przyspieszenia normalnego punktu A oraz stycznego punktu B względem A.	

21. Poniżej przedstawiono plan prędkości oraz kolejne czynności zmierzające do jego wykreślenia. Jedna z czynności jest błędna. Zaznacz którą.

	<ol style="list-style-type: none"> 1) Obok rysunku mechanizmu przenosimy prędkość \vec{V}_A. 2) Z końca wektora \vec{V}_A kreślimy prostą równoległą do ośniwa AB. Prosta ta wyznaczy kierunek wektora prędkości punktu B względem punktu A. 3) Z początku wektora \vec{V}_A kreślimy prostą prostopadłą do ośniwa O_2B. Prosta ta wyznaczy kierunek wektora prędkości punktu B 4) Punkt przecięcia będzie wyznaczał koniec wektora prędkości punktu B (\vec{V}_B).
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A. 1. B. 2 C. 3 D. 4

22. Mając dane: $n_a = 1410 \text{ obr/min}$; $z_1 = z_3 = 80$, $z_2 = z_4 = 40$ oblicz obroty koła z_1 .

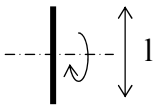
	Ruchy składowe	Ramię „a”	Koło 1	Koła 2; 3	Koło 4
	Całość $+n_a$	$+n_a$	$+n_a$	$+n_a$	$+n_a$
	Ramię „a” 0 Koło 1 n_a	0	$-n_a$	$+n_a \frac{z_1}{z_2}$	$-n_a \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$
	Wynik	$+n_a$	0	$n_a \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)$	$n_a \left(1 - \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \right)$

Obroty koła z_1 będą wynosiły:

A. 1410 obr/min B. 0 obr/min C. 4230 obr/min D. - 4230 obr/min

23. Jaką wartość i znak będzie miała siła bezwładności wózka o masie 100 kg i poruszającego się z przyspieszeniem 5 m/s^2 ? Siła ciągnąca wynosi $+ 2000 \text{ N}$.
 A. $+ 500 \text{ N}$ B. $- 500 \text{ N}$ C. $+ 1500 \text{ N}$ D. $- 1500 \text{ N}$

24. Oblicz masowy moment bezwładności cienkiego pręta wirującego z prędkością $n = 200$ obr/min, posiadającego masę 10 kg i długość 1 metr.

A.	$100/12 \text{ kg m}^2$	B.	0 kg m^2	$J_x = m l^2 / 12$ $J_y = 0$	
C.	$20\,000 \text{ kg m}^2$	D.	$2000/12 \text{ kg m}^2$		

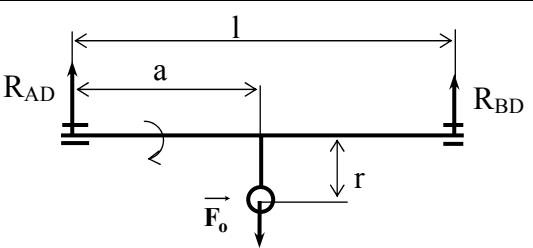
25. Jaką pracę mechaniczną wykona kulka stalowa o masie 1 kg spadająca z wysokości 10 cm.
 A. 98,1 J B. 10 J C. 9,81 J D. 0,981 J

26. Jaka jest sprawność silnika wciągarki o mocy 2 kW, jeżeli podniesie ciało o masie 10 kg na wysokość 10 metrów w ciągu 10 sekund. Dla uproszczenia przyjmij $g = 10 \text{ m/s}^2$.
 A. 98,1 % B. 63 % C. 50 % D. 25 %

27. Jaka jest sprawność kucia, jeżeli energia kinetyczna przed uderzeniem wynosi 1000 J, po uderzeniu 200 J, strata energii 800 J
 A. 80% B. 60 % C. 40% D. 20%

28. Jakim momentem należy działać, aby nadać obracającemu się ciału prędkość obrotową 10 obr/sek w czasie 20 sekund? Moment bezwładności wynosi 1 kg m^2 .
 A. 1Nm B. 10 Nm C. 20 Nm D. 200 Nm

29. Reakcje dynamiczne poniższego wału można obliczyć korzystając z następujących warunków:

	<p>A. $R_{AD} + R_{BD} = 0$; $R_{AD} + R_{BD} - F_0 = 0$</p> <p>B. $R_{AD} + R_{BD} - F_0 = 0$; $R_{BD} l - F_0 a = 0$</p> <p>C. $R_{BD} l - F_0 a = 0$; $R_{BD} l + F_0 a = 0$</p> <p>D. $R_{AD} + R_{BD} - F_0 = 0$ $R_{BD} (l - a) + F_0 r + R_{AD} a = 0$</p>
-------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

30. Rozróżniamy następujące rodzaje wyważania:

- A. statyczne, kinematyczne i dynamiczne,
 B. statyczne, kinematyczne i kinematyczno-statyczne,
 C. statyczne, dynamiczne i dynamiczno-statyczne,
 D. kinematyczne, dynamiczne i kinematyczno-dynamiczne.

KARTA ODPOWIEDZI

Imię i nazwisko.....

Wyznaczanie obciążeń w układach statycznych, kinematycznych i dynamicznych

Zakreśl poprawną odpowiedź.

Nr zadania	Odpowiedź				Punkty
1	a	b	c	d	
2	a	b	c	d	
3	a	b	c	d	
4	a	b	c	d	
5	a	b	c	d	
6	a	b	c	d	
7	a	b	c	d	
8	a	b	c	d	
9	a	b	c	d	
10	a	b	c	d	
11	a	b	c	d	
12	a	b	c	d	
13	a	b	c	d	
14	a	b	c	d	
15	a	b	c	d	
16	a	b	c	d	
17	a	b	c	d	
18	a	b	c	d	
19	a	b	c	d	
20	a	b	c	d	
21	a	b	c	d	
22	a	b	c	d	
23	a	b	c	d	
24	a	b	c	d	
25	a	b	c	d	
26	a	b	c	d	
27	a	b	c	d	
28	a	b	c	d	
29	a	b	c	d	
30	a	b	c	d	

6. LITERATURA

1. Janicki L.: Mechanika techniczna. WSiP, Warszawa 1990
2. Kozak B.: Mechanika techniczna. WSiP, Warszawa 2004
3. Kozak B.: Mechanika techniczna. Statyka. Testy i sprawdziany. WSiP, Warszawa 1999
4. Mały poradnik mechanika. Praca zbiorowa: WNT, Warszawa 1999
5. Siuta W.: Mechanika techniczna. WSiP, Warszawa 2000
6. Siuta W., Rososiński S., Kozak B.: Zbiór zadań z mechaniki technicznej. WSiP, Warszawa 2005